Eulerin verkkojen karakterisointi

Pro Gradu -tutkielma
Jenni Heikkilä
2373175
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2018

Sisältö

Johdanto

Tämän Pro Gradu -tutkielman tarkoituksena on esitellä Eulerin verkkojen karakterisointiin tarvittavia verkkoteorian peruskäsitteitä, sekä niiden avulla karakterisoida Eulerin verkot. Eulerin verkoilla tarkoitetaan sellaisia verkkoja, joissa on mahdollista kulkea reitti verkon jokaisen solmun kautta siten, että jokainen kaari esiintyy täsmälleen kerrran. Kierroksen lopuksi palataan takaisin lähtöpisteseen.

Verkkoteoria on saanut alkunsa 1700-luvulla Königsbergin siltaongelmasta, jonka sveitsiläinen matemaatikko Leonhard Euler onnistui ratkaisemaan vuonna 1736. Nykyisessä Kaliningradissa, joka 1700-luvulla tunnettiin nimellä Königsberg, virtaa kaupungin läpi joki, jonka keskellä on kaksi saarta. Joen molemmilta rannoilta on mahdollista kulkea kuuden eri sillan kautta saarille, ja lisäksi saarien välillä on yksi silta. Ongelmallinen kysymys oli, onko reitti mahdollista kulkea siten, että jokainen silta ylitetään täsmälleen kerran. Euler onnistui ensimmäisenä esittämään ongelman matemaattisesti ja osoittamaan, ettei siihen ollut ratkaisua [3]. Euler perusteli, että edellä kuvatun kaltaisen reitin olemassaolo verkossa edellyttää, että muodostuva verkko on yhtenäinen, ja lisäksi verkossa täytyy olla täsmälleen kaksi paritonasteista pistettä. Tätä tulosta hyödyntäen voidaan määritellä myös Eulerin verkot, joissa lisäksi on mahdollista kulkea edellä kuvatun kaltainen reitti palaten lopuksi takaisin lähtöpisteeseen. Tällaiset ehdot täyttäviä verkkoja nimitetään Eulerin verkoiksi.

Koska Königsbergin siltojen muodostama verkko ei toteuttanut näitä ehtoja, ei reittiä ollut mahdollista kulkea edellä kuvatulla tavalla. Alkuperäinen Eulerin esittämä perustelu Königsbergin siltaongelmaan on julkaistu vuonna 1736 teoksessa *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Englanninkielinen käännös alkuperäistekstistä löytyy teoksesta [4]. Eulerin ongelmaan esittämän matemaattisen perustelun pohjalta on saanut alkunsa verkkoteoriaksi nimetty diskreetin matematiikan osa-alue, jolla on nykymaailmassa paljon tärkeitä solvellutuksia esimerkiksi tietoliikenneverkoissa, reittikartoissa ja kaupunkien tiestöjen suunnittelussa.

Tutkielmassa esitetyt lauseet ja määritelmät on laadittu pääosin teoksen [1] pohjalta, ellei toisin ole mainittu. Esimerkkien ja kuvien yhteydessä on mainittu erikseen niiden mahdolliset lähteet.

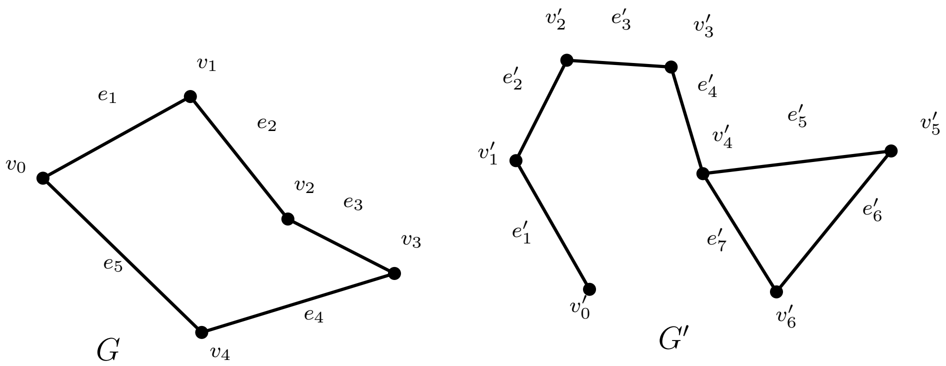
1 Verkkojen peruskäsitteet

1.1 Verkon määrittely

Verkon muodostaa joukko pisteitä eli solmuja (*vertex*), sekä niitä yhdistävät viivat eli kaaret (*edge*). Käytetään jatkossa nimityksiä solmu ja kaari. Määritellään verkko solmujen ja kaarien avulla seuraavasti:

Määritelmä 1.1. Verkko G on järjestetty pari (V, E), missä V on jokin joukko ja E on joukko, joka sisältää 2-alkioisia joukon V osajoukkoja. Joukon V alkioita kutsutaan verkon G solmuiksi, ja joukon E alkiot ovat kaaria verkossa G.

Esimerkki 1.2. Tarkastellaan alla olevassa kuvassa esitettyjä kahta erilaista määritelmän 1.1 mukaista verkkoa G ja G'.



Kuva 1: Verkot G ja G'.

Nyt verkon G solmujoukko ja kaarijoukko ovat

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\} \quad \text{ja} \quad E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}.$$

Verkossa G' puolestaan on solmujoukko ja kaarijoukko

$$V' = \{v_0', v_1', v_2', v_3', v_4', v_5', v_6'\} \quad \text{ja} \quad E' = \{e_1', e_2', e_3', e_4', e_5', e_6', e_7'\}.$$

Kaikki verkkojen G ja G' kaaret voidaan myös esittää solmuparien avulla seuraavasti:

$$e_1 = \{v_0, v_1\}; e_2 = \{v_1, v_2\}; \ldots; e_1' = \{v_0', v_1'\}; \ldots; e_7' = \{v_6', v_4'\}.$$

Verkkojen G ja G' kaaret ja solmut on myös mahdollista järjestää eri tavalla, kuin kuvassa.

1.2 Merkintöjä

Kun halutaan ilmaista, että jollakin verkolla G on solmujoukko V, joka koostuu verkon solmuista ja kaarijoukko E, joka sisältää verkon kaaret, käytetään merkintää $G = (V, E)$. Jos verkko G on tunnettu, ja halutaan viitata sen solmujen muodostamaan joukkoon, käytetään merkintää $V(G)$. Vastaavasti voidaan verkon G kaarijoukkoa ilmaista merkinnällä $E(G)$.

Joukon V 2-alkioisille osajoukoille voidaan myös käyttää merkintää $\binom{V}{2}$. Tällöin voidaan sanoa, että verkko on pari (V, E), missä $E \subseteq \binom{V}{2}$.

Jos $\{u, v\}$ on jokin verkon G kaari, sanotaan että solmut u ja v ovat vierekkäisiä (tai naapureita) verkossa G. Voidaan myös sanoa, että solmut u ja v on yhdistetty kaarella.

Määritelmä 1.3 (Suuntaamaton verkko)**.** [2, Luku 1.1] Suuntaamaton verkko on kolmikko $G = (V, E, p)$, jossa

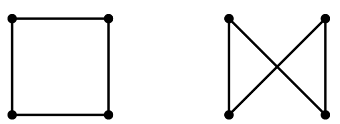
$$p : E \to \{\bar{V} \subseteq V | 1 \leq |\bar{V}| \leq 2\}.$$

Kuvaus p liittää siis jokaisen verkon kaaren johonkin verkon solmujoukon V osajoukkoon $\bar{V}$. Suuntaamattomassa verkossa kaarien kulkusuunta on vapaa.

Määritelmä 1.4 (Yksinkertainen verkko)**.** [2, Luku 1.1] Olkoon $G = (V, E, p)$ verkko. Jos kuvaus p on injektio, verkko G on yksinkertainen, eli jokainen kaari esiintyy verkossa täsmälleen kerran.

Jatkossa keskitytään tarkastelemaan pääasiallisesti yksinkertaisia äärellisiä suuntaamattomia verkkoja, ja niiden ominaisuuksia, ellei toisin mainita.

Verkkoa voidaan usein kuvata tasopiirroksena, jossa solmut on merkitty tason pisteiksi, ja kaaret pisteitä yhdistäviksi suoriksi tai kaareutuviksi viivoiksi (*arcs*). Piiroksena syntyvä kuvio on verkkomainen, mikä lienee syy verkko-nimitykseen. Yksi verkko voidaan piirtää monella eri tavalla. Esimerkiksi



Kuva 2: Samasta solmujoukosta voidaan kaaria eri tavoin yhdistelemällä saada saman verkon erilainen piirros.

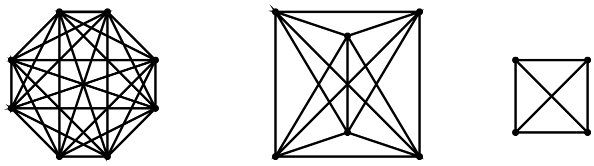
Visuaalisesti hyvin järjestetyssä verkon piirroksessa kaarien tulisi ylittää toisiaan mahdollisimman vähän. Esimerkiksi joissakin elektroniikkakaavioissa kaarien risteämiset eivät ole sallittuja. Kaarien risteäminen voi olla varsinkin verkkojen sovelluksissa haitallista solmujen merkityksen kannalta. Verkkoa, jossa kaaret voidaan piirtää tasoon siten, että ne eivät risteä, kutsutaan tasoverkoksi (*planar graph*) [3]. Muussa tapauksessa verkko on avaruusverkko.

1.3 Tärkeitä verkkotyyppejä

Esitellään seuraavaksi muutamia tärkeimpiä verkkotyyppejä havainnekuvineen. Kyseiset verkkotyypit esiintyvät usein verkkoteoriassa, ja niitä tarvitaan myös jatkossa tässä tutkielmassa.

Määritelmä 1.5 (Erilaisia verkkoja)**.**
Täydellinen verkko K_n:

$$V = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad E = \binom{V}{2}.$$

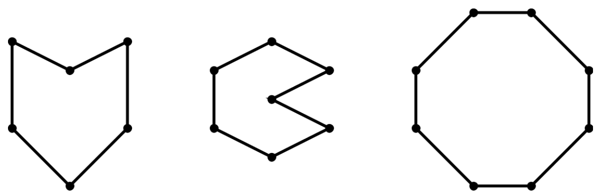


K_8 K_6 K_4

Kuva 3: Täydellisessä verkossa on kaikki mahdolliset kaaret solmujen välillä.

Sykli C_n:

$$V = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad E = \{\{i, i+1\} | i = 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\}.$$

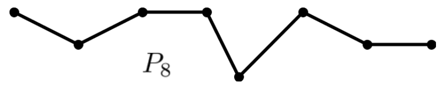


C_6 C_7 C_8

Kuva 4: Sykli muodostaa suljetun kierroksen, jonka alkupiste ja loppupiste ovat samat.

Polku P_n:

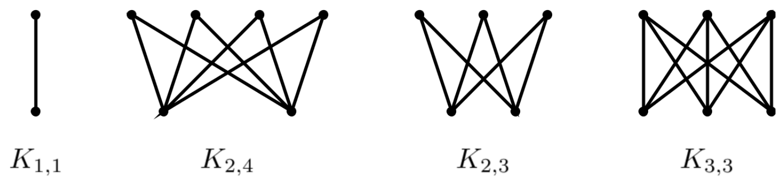
$$V = \{0, 1, \ldots, n\}, \quad E = \{\{i-1, i\} | i = 1, 2, \ldots, n\}.$$



Kuva 5: Polku.

Täydellinen kaksiosainen verkko $K_{n,m}$:

$$V = \{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v_1, \dots, v_m\}, \quad E = \{\{u_i, v_j\} | i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, m\}.$$



Kuva 6: Täydellisessä kaksiosaisessa verkossa jokainen joukon $\{u_1, \dots, u_n\}$ solmu on yhdistetty kaarella jokaiseen joukon $\{v_1, \dots, v_m\}$ solmuun.

Huomautus 1.6. Yleisesti voidaaan sanoa, että verkko G on kaksiosainen, mikäli joukko $V(G)$ voidaan jakaa kahteen erilliseen osajoukkoon V_1 ja V_2, ja jokainen verkon G kaari yhdistää joukon V_1 solmun johonkin joukon V_2 solmuun. Kaarijoukkoa voidaan tällöin merkitä

$$E(G) \subset \{\{v, v'\} | v \in V_1, v' \in V_2\},$$

ja joukkoja V_1 ja V_2 voidaan kutsua verkon G luokiksi.

Täydellisestä kaksiosaisesta verkosta (määritelmä 1.5) poiketen yleisessä kaksiosaisessa verkossa kaikkien joukon V_1 solmujen ei tarvitse olla yhteydessä kaikkiin joukon V_2 solmuihin.

Olkoon $G = (V, E)$ verkko, jossa solmujoukon V alkioiden lukumäärä on $|V| = n$. Nyt solmujoukosta V voidaan muodostaa kaaria $\binom{n}{2}$ eri tavalla. Koska jokainen kaari $e \in E$ on 2-alkioinen osajoukko solmujoukosta V, ja solmujoukosta muodostettavissa erilaisissa verkoissa kaarien lukumäärä on jokin luku välillä $0, 1, \dots, \binom{n}{2}$, on n-solmuisia erilaisia verkkoja yhteensä $2^{\binom{n}{2}}$ kappaletta. Lukumäärä saadaan tuloperiaatteella huomioimalla kaikissa $\binom{n}{2}$ mahdollisen kaaren tapauksessa tilanteet, joissa kyseinen kaari joko on tai ei ole verkossa.

Määritelmä 1.7. Verkot G ja G' ovat identtisiä tai samat, jos niillä on sama kaarijoukko ja sama solmujoukko, eli

$$G = G' \quad \Leftrightarrow \quad V(G) = V(G') \quad \text{ja} \quad E(G) = E(G').$$

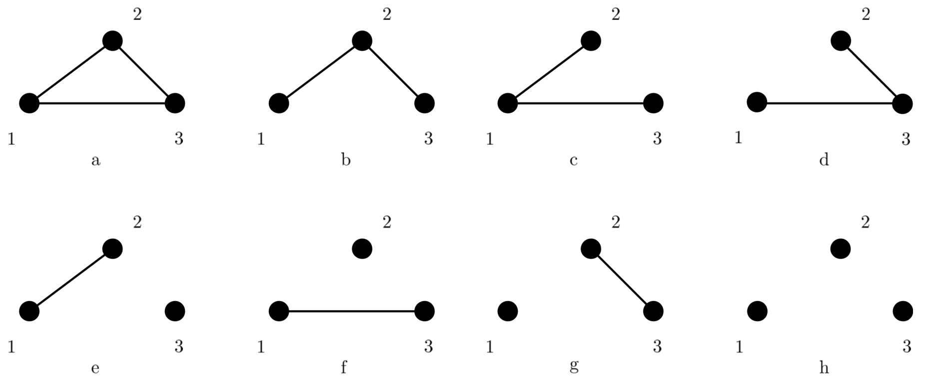
Määritellään seuraavaksi isomorfismin käsite, joka säilyttää vierekkäiset solmut vierekkäisinä, mutta mahdollistaa verkon erilaisen ulkomuodon.

Määritelmä 1.8 (Verkkoisomorfismi)**.** Verkot $G = (V, E)$ ja $G' = (V', E')$ ovat isomorfisia, jos on olemassa sellainen bijektiivinen kuvaus $f : V \to V'$, että

$$\{x, y\} \in E \quad \text{jos ja vain jos} \quad \{f(x), f(y)\} \in E'$$

kaikilla $x, y, \in V$, $x \neq y$. Tällöin sanotaan, että kuvaus f on isomorfismi verkolta G verkolle G', ja merkitään $G \cong G'$.

Esimerkki 1.9. Olkoon solmujoukko $V = \{1, 2, 3\}$. Nyt solmujoukosta V voidaan muodostaa $2^{\binom{3}{2}} = 8$ erilaista verkkoa, joista 4 on epäisomorfisia.



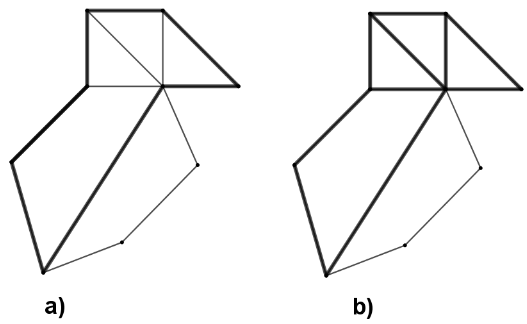
Kuva 7: Verkot joukossa $V = \{1, 2, 3\}$.

Tapaukset a, b, e ja h ovat keskenään epäisomorfisia, koska niissä on eri määrä kaaria solmujen välillä. Isomorfismin määritelmän nojalla keskenään isomorfisissa verkoissa kaarien lukumäärä on sama. Tapaukset b, c ja d, sekä e, f ja g ovat keskenään isomorfisia, koska niissä kaarien lukumäärät ovat samat, ja vierekkäiset solmut säilyvät vierekkäisinä.

Määritelmä 1.10 (Aliverkko)**.** Olkoon G ja G' verkkoja. Sanotaan, että verkko G on verkon G' aliverkko, jos $V(G) \subseteq V(G')$ ja $E(G) \subseteq E(G')$. Verkko G on verkon G' indusoima aliverkko, jos $V(G) \subseteq V(G')$ ja $E(G) = E(G') \cap \binom{V(G)}{2}$).

Indusoitu aliverkko saadaan poistamalla verkosta G' yksi tai useampia solmuja sekä kaaret, jotka sisältävät poistetut solmut. Aliverkko sen sijaan voidaan muodostaa poistamalla kaaria, mutta niiden sisältämien solmujen poistaminen ei ole välttämätöntä.

Esimerkki 1.11. Alla olevassa kuvassa on esitetty eräs verkko G. Vasemmalla kuvassa a) on paksummalla viivalla piirretty eräs verkon G aliverkko. Kuvan a) verkko ei ole kuitenkaan verkon G indusoima aliverkko, koska se ei sisällä kaikkia sellaisia verkon G kaaria, joiden molemmat päätepisteet ovat aliverkon solmujoukossa. Kuvassa b) oleva paksulla viivalla piirretty aliverkko sen sijaan on verkon G indusoima aliverkko, koska nyt aliverkossa on kaikki sellaiset kaaret, joiden molemmat päätesolmut kuuluvat aliverkon solmujoukkoon (määritelmä 1.10).



Kuva 8: Kuvassa a) on verkon G aliverkko, kuvassa b) on verkon G indusoima aliverkko.

Määritelmä 1.12 (Polut ja syklit)**.** Verkon G aliverkko, joka on isomorfinen polun P_t kanssa, on polku verkossa G, ja sitä kuvataan jonolla

$$(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t),$$

missä $v_0, v_1, \ldots, v_t$ ovat pareittain erillisiä verkon G solmuja, ja jokaiselle $i = 1, 2, \ldots, t$ on olemassa kaari $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$. Voidaan myös sanoa, että polku $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$ on t-pituinen polku solmusta v_0 solmuun v_t. Erikoistapauksena määritellään polku $P_0 = v_0$, joka sisältää yhden solmun v_0 ja sen pituus $t = 0$.

Verkon G aliverkko, joka on isomorfinen syklin $C_t(t \geq 3)$ kanssa on sykli verkossa G, ja sitä kuvataan jonolla

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_{t-1}, v_{t-1,} e_t, v_0),$$

missä solmut $v_0, v_1, \ldots, v_{t-1}$ ovat pareittain erillisiä solmuja verkossa G, ja $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, t-1$, ja myös $E_t = \{v_{t-1}, v_0\} \in E(G)$. Luku $t \geq 3$ on syklin pituus.

Yleisesti ottaen isomorfismin löytäminen kahden verkon välillä on yksi tunnetuista verkkoteorian ongelmista eikä sille ole löydetty edelleenkään tehokasta ja aina toimivaa algoritmia. Ongelma tulee esille, kun osoitetaan että kaksi verkkoa, joilla on n kappaletta solmuja, eivät ole isomorfisia. Merkitään näiden kahden verkon solmujoukkoja V ja V', ja tarkastellaan joukon V solmujen kuvautumista solmujoukkoon V'. Nyt ensimmäinen solmu n-solmuisesta joukosta V voidaan kuvata n eri solmuun joukossa V'. Tämän jälkeen seuraava solmu on mahdollista kuvata $n-1$ eri solmulle joukossa V'. Kuvaamalla vastaavasti kaikki loputkin solmujoukon V solmut, saadaan lopulta $n!$ erilaista mahdollista kuvausta joukolta V joukolle V'. Isomorfismin määritelmän mukaisesti väitteen osoittamiseksi tulisi siis tarkastella $n!$ kappaletta mahdollisia bijektioita ja osoittaa, että kyseiset bijektiot eivät ole isomorifismeja solmujoukoissa. Koska tarkasteltavien tapausten määrä kasvaa nopeasti hyvin suureksi, voidaan tarkastelu ohittaa, jos isomorfismin olemassaolo voidaan sulkea pois muiden ehtojen nojalla. Yksi isomorfismin poissulkevista ehdoista on verkon kaarien lukumäärä, sillä isomorfismi säilyttää verkon kaarien lukumäärän muuttumattomana. Samoin isomorfisissa verkoissa syklien ja polkujen pituudet pysyvät samana.

Tarkastellaan seuraavaksi epäisomorfisten verkkojen lukumäärää. Olkoon $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ solmujoukko. Valitaan verkko solmujoukosta V, eli valitaan satunnainen kaarijoukko $E \subseteq \binom{V}{2}$. Joukossa $\binom{V}{2}$ on $\binom{n}{2}$ alkiota, joten erilaisten verkkojen lukumäärä joukosta V on täsmälleen $2^{\binom{n}{2}}$. Näin ollen täytyy parittain epäisomorfisten n-solmuisten verkkojen lukumäärän olla vähemmän kuin $2^{\binom{n}{2}}$. Parittain epäisomorfisten verkkojen lukumäärä saadaan tutkimalla ekvivalenssirelaation $\cong$ muodostamien ekvivalenssiluokkien lukumäärää n-solmuisten verkkojen joukossa. Lukumäärä on vaikea laskea tarkasti, mutta pätevä arvio saadaan seuraavasti: Epäisomorfisten verkkojen lukumäärä n-solmuisesta joukosta ei varmasti ole suurempi kuin kaikkien verkkojen lukumäärä joukossa V eli $2^{\binom{n}{2}}$. Määritelmän 1.8 nojalla isomorfisille verkoille G ja G' on olemassa bijektio $f : V \to V'$. Koska kaikkien mahdollisten bijektioiden $f : V \to V'$ lukumäärä on $n!$, niin verkolla G on enintään $n!$ isomorfista verkkoa joukossa V. Koska jokainen relaation $\cong$ määräämä ekvivalenssiluokka solmujoukon V määrittämissä verkoissa G koostuu enintään $n!$ verkosta, ekvivalenssiluokkien määrä on vähintään

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}.$$

Näin ollen n solmuisten parittain epäisomorfisten verkkojen lukumäärä on vähintään tämän suuruinen.

Osoitetaan seuraavaksi, että funktion $n!$ kasvunopeus ei ole merkittävästi pienempi kuin funktion $2^{\binom{n}{2}}$ kasvunopeus. Tutkitaan kasvunopeutta logaritmifunktion avulla, ja käytetään hyväksi tunnettua arviota $n! \leq n^n$. Saadaan

$$\log_2 2^{\binom{n}{2}} = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

ja

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} &= \log_2 2^{\binom{n}{2}} - \log_2 n! \geq \binom{n}{2} - \log_2 n^n = \frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) - n\log_2 n \\ &= \frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{2\log_2 n}{n}\right).\end{aligned}$$

Huomataan, että logaritmit voidaan korvata funktiolla $\frac{1}{2}n^2$, sillä funktion $\frac{2\log_2 n}{n}$ arvo lähestyy 0, kun $n \to \infty$. Näin ollen suurilla arvoilla n logaritmin korvaamisesta aiheutuva suhteellinen virhe on pieni. Erityisesti, jos n on riittävän suuri, epäisomorfisten n-solmuisten verkkojen lukumäärä on huomattavasti suurempi kuin 2^n. Edellä esitetty arvio osoittaa, että epäisomorfisia verkkoja on paljon, mutta se ei kuitenkaan anna sellaisten verkkojen kokoelmaa.

Määritellään seuraavaksi yhtenäinen verkko, jossa jokaisesta verkon solmusta on kaarien välityksellä yhteys kaikkiin muihin verkon solmuihin.

Määritelmä 1.13 (Yhtenäinen verkko)**.** Verkko G on yhtenäinen, mikäli kaikilla solmuilla $x, y \in V(G)$ on olemassa polku solmujen x ja y välillä verkossa G.

Määritelmä 1.14 (Kulku)**.** Olkoon $G = (V, E)$ verkko. Jonoa

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_t, v_t)$$

kutsutaan kuluksi verkossa G, jos kaikilla $i = 1, \ldots, t$ pätee

$$e_i = \{v_{i-1}, v_i\} = \{v_i, v_{i-1}\} \in E.$$

Jos $t = 0$ saadaan 0-pituinen kulku, joka sisältää yhden solmun v_0. Kulku eroaa polusta siten, että solmut ja kaaret voivat toistua kulussa, kun taas polussa ne esiintyvät vain kerran.

Määritelmä 1.15. Määritellään relaatio $\sim$ joukossa $V(G)$ seuraavasti:

$$x \sim y$$

jos ja vain jos verkossa G on olemassa kulku solmusta x solmuun y.

Lause 1.16. *Relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio verkossa G.*

Todistus. Osoitetaan, että relaatio $\sim$ toteuttaa seuraavat ehdot:
1. Refleksiivisyys: $v \sim v \quad \forall v \in V(G)$.
2. Symmetrisyys: Jos $v, v' \in V(G)$ ja $v \sim v'$, niin myös $v' \sim v$.
3. Transitiivisuus: Jos $v, v', v'' \in V(G)$, $v \sim v'$ ja $v' \sim v''$, niin $v \sim v''$.

1. Olkoon v mielivaltainen verkon G solmu. Tällöin (v) on 0-pituinen kulku solmusta v solmuun v, joten $v \sim v$, ja symmetrisyys on voimassa.

2. Olkoon v, v' verkon G solmuja, joille $v \sim v'$. Tällöin verkossa G on olemassa kulku $(v, e, v_1, e_1, \ldots, e_t, v')$ solmusta v solmuun v'. Koska tässä keskitymme tarkastelemaan suuntaamattomia verkkoja, niin vastaavasti $(v', e_t, \ldots, e_1, v_1, e, v)$ on kulku solmusta v' solmuun v. Näin ollen myös $v' \sim v$, joten symmetrisyysehto on voimassa.

3. Olkoon nyt v, v' ja v'' verkon G solmuja, joille on voimassa $v \sim v'$ ja $v' \sim v''$. Tällöin relaation nojalla verkossa G on kulku $(v, e, v_1, e_1, \ldots, e_t, v')$ solmusta v solmuun v', ja kulku $(v', e', \ldots, e_k, v'')$ solmusta v' solmuun v''. Näin ollen verkossa välttämättä on ainakin yksi kulku solmusta v solmuun v'' siten, että kulku menee solmun v' kautta. Näin ollen $v \sim v''$, ja myös transitiivisuusehto on voimassa.

Kohtien $1. - 3.$ perusteella voidaan todeta, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio joukossa $V(G)$. □

Määritelmä 1.17 (Komponentit)**.** Olkoon joukko $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$, missä $V_i \cap V_j = \emptyset$, kun $i \neq j$, solmujoukon V jako relaation $\sim$ määräämiin ekvivalenssiluokkiin. Joukkojen V_i indusoimia aliverkkoja verkossa G kutsutaan verkon G komponenteiksi.

Huomautus 1.18. Minkä tahansa verkon jokainen komponentti on yhtenäinen, ja verkko on yhtenäinen jos ja vain jos sillä on yksi komponentti.

Todistus. On selvää, että yhtenäisellä verkolla on vain yksi komponentti, koska yhtenäisessä verkossa jokaisesta verkon solmusta on yhteys kaarien välityksellä jokaiseen muuhun verkon solmuun. Toisaalta minkä tahansa verkon G komponentin kaksi solmua x ja y voidaan yhdistää kululla. Lyhin mahdollinen kulku solmujen x ja y välillä on tällöin aina polku. Määritelmän 1.13 nojalla verkko G on tällöin yhtenäinen. □

Määritelmä 1.19. Olkoon $G = (V, E)$ yhtenäinen verkko. Solmujen $v, v' \in V(G)$ etäisyys $d_G(v, v')$ on lyhimmän polun pituus solmusta v solmuun v' verkossa G.

Lause 1.20. *Funktiota $d_G : V \times V \to \mathbb{R}$ kutsutaan etäisyysfunktioksi tai metriikaksi verkossa G, koska sillä on seuraavat ominaisuudet:*

1. *$d_G(v, v') \geq 0$, ja $d_G(v, v') = 0$ jos ja vain jos $v = v'$;*

2. *$d_G(v, v') = d_G(v', v)$ kaikilla solmuilla $v, v' \in V(G)$ (symmetrisyys);*

3. *$d_G(v, v'') \leq d_G(v, v') + d_G(v', v'')$ kaikilla solmuilla $v, v', v'' \in V(G)$ (kolmioepäyhtälö);*

Etäisyysfunktio d_G ja joukko V määräävät yhdessä metrisen avaruuden.

Todistus.

1. Määritelmän 1.19 nojalla $d_G(v, v')$ on lyhin polun pituus solmujen v ja v' välillä, ja polun pituus saadaan laskemalla polkuun kuuluvien kaarien lukumäärä. Näin ollen voidaan päätellä, että $d_G(v, v') \geq 0$ kaikilla $v, v' \in V(G)$ ja $d_G(v, v') = 0$ täsmälleen silloin kun $v = v'$.

2. Koska tarkasteltava verkko G on suuntaamaton, verkon kaaria voidaan kulkea molempiin suuntiin. Näin ollen jos verkossa on polku solmusta v solmuun v', sama polku voidaan kulkea myös solmusta v' solmuun v, ja polun pituus pysyy muuttumattomana. Näin ollen $d_G(v, v') = d_G(v', v)$.

3. Nyt verkossa G on polku solmujen v ja v' välillä, sekä polku solmujen v' ja v'' välillä. Tällöin verkossa on välttämättä polku myös solmujen v ja v'' välillä. Koska $d_G(v, v')$ ja $d_G(v', v'')$ ovat lyhimmät polut solmujen v ja v', sekä solmujen v' ja v'' välillä, ei myöskään lyhin polku solmusta v solmuun v'' voi olla tätä pitempi. Näin ollen kolmioepäyhtälö
$$d_G(v, v'') \leq d_G(v, v') + d_G(v', v'')$$
on voimassa kaikilla solmuilla $v, v', v'' \in V(G)$.

Kohtien 1.-3. nojalla etäisyysfunktio ja joukko V muodostavat metrisen avaruuden.

□

Määritelmä 1.21. Olkoon G verkko ja v solmu verkossa G. Luku $\deg_G(v)$ on solmun v aste verkossa G, ja se kertoo solmun v sisältävien kaarien lukumäärän.

Olkoon $v_1, v_2, \ldots, v_n$ verkon G mielivaltaisessa järjestyksessä valittuja solmuja. Jonoa
$$(\deg_G(v_1), \deg_G(v_2), \ldots, \deg_G(v_n))$$
kutsutaan verkon G astejonoksi. Samalle verkolle saadaan useita erilaisia astejonoja vaihtamalla solmujen numerointijärjestystä. Näin ollen kahta verkon

astetta ei voida erottaa toisistaan, jos toinen jonoista saadaan järjestämällä toisen termit uudelleen. Astejono kirjoitetaan tavallisesti järjestyksessä, jossa pienin aste tulee ensimmäiseksi.

Isomorfisten verkkojen astejonot ovat samat, ja näin ollen jos verkkojen astejonot poikkeavat toisistaan, ne ovat välttämättä epäisomorfisia. Sama verkon astejono on välttämätön mutta ei riittävä ehto isomorfisuudelle. Verkon aste on usein helposti laskettavissa, joten sen avulla voidaan erottaa epäisomorfiset verkot toisistaan sellaisissa tapauksissa, joissa astejonot poikkeavat toisistaan.

Verkon asteet ilmaisevan lukujonon karkaterisointi on yksi verkkoteorian ongelmista. Seuraava huomautus antaa tärkeän ominaisuuden tällaisen jonon karkaterisoimiseksi.

Huomautus 1.22. Kaikille verkoille $G(V, E)$ pätee

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$

Todistus. Solmun v aste kertoo sen sisältävien kaarien lukumäärän. Todistus seuraa siitä, että jokainen kaari sisältää kaksi solmua, ja laskemalla yhteen kaikki asteet, saadaan kaksi kertaa kaarien lukumäärä. □

Seuraus 1.23 (Kättelylemma). *Paritonasteisten solmujen lukumäärä äärellisessä verkossa on aina parillinen.*

Todistus. Huomautuksen 1.22 nojalla verkon kaikkien asteiden summa on parillinen. Koska parillista astetta olevien solmujen asteiden summa on parillinen, täytyy myös paritonta astetta olevien solmujen asteiden summan olla parillinen. Tämä toteutuu täsmälleen silloin, kun paritonta astetta olevia solmuja on parillinen määrä. □

Lause 1.24 (Astelause). *Olkoon $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ jono luonnollisia lukuja, joille $n > 1$ ja $d_n \leq n - 1$. Oletetaan että $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$, ja merkitään symbolilla D' jonoa $(d'_1, \ldots, d'_{n-1})$, missä*

$$d'_i = \begin{cases} d_i & \text{kun } i < n - d_n \\ d_i - 1 & \text{kun } i \geq n - d_n \end{cases}$$

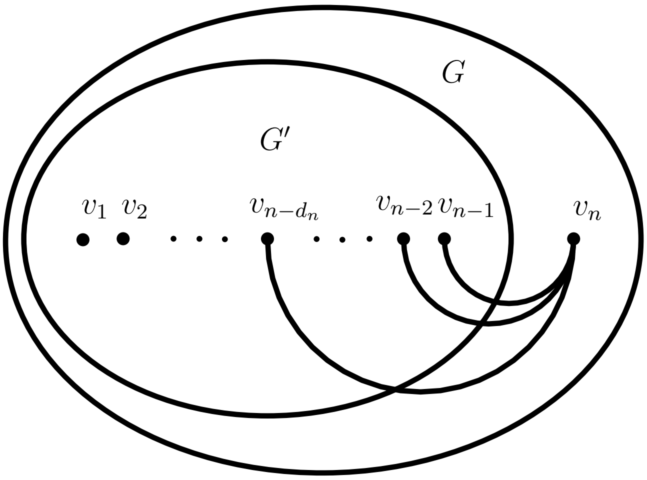
Tällöin D on verkon astejono jos ja vain jos D' on verkon astejono.

Todistus. 1. Oletetaan, että D' on verkon $G' = (V', E')$ aste, missä

$$V' = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}, \quad \text{ja} \quad \deg_G(v_i) = d'_i,$$

kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Asetetaan uusi solmu v_n, joka on erillinen kaikille solmuille $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, ja määritellään uusi verkko $G = (V, E)$, missä

$$
\begin{aligned}
V &= V' \cup \{v_n\} \\
E &= E' \cup \{\{v_i, v_n\} : i = n - d_n, n - d_n + 1, \ldots, n - 1\}.
\end{aligned}
$$



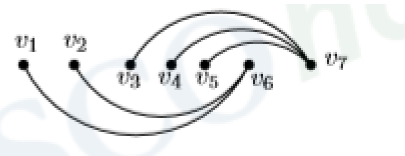
Kuva 9: Solmun v_n lisääminen verkkoon G'.

Nyt solmu v_n on yhteydessä verkon G' d_n viimeiseen solmuun, eli solmun v_n aste on d_n. Solmujen v_i, $i < n - d_n$ aste sen sijaan ei kasva, koska solmu v_n ei ole yhteydessä niihin. Näin ollen verkon G astejonoksi saadaan siis

$$D = (d'_1, d'_2 \ldots, d'_{n-d_n-1}, d'_{n-d_n} + 1, \ldots, d'_{n-1} + 1, d_n).$$

2. Olkoon nyt D verkon astejono, ja osoitetaan, että tällöin myös D' on verkon astejono. Kohdassa 1 verkkoon G' lisättiin uusi solmu, jonka aste oli korkein verkon asteista. Nyt ei voida menetellä vastaavasti ja poistaa suurimman asteluvun solmua, sillä kyseinen solmu voi olla yhdistetty kaarella sellaisiin solmuihin, joiden aste ei saisi pienentyä, tai vastaavasti suurimman asteluvun solmu ei ole yhdistetty sellaisiin solmuihin,

joiden asteen tulisi pienentyä suurimman asteluvun solmun poistamisen seurauksena. Tämän kaltaista tilannetta on havainnollistettu seuraavassa kuvassa, jossa korkeimman solmun aste on 3, ja $n = 7$. Tässä tapauksessa siis solmujen v_4, v_5 ja v_6 asteen tulisi pienentyä yhdellä, kun solmu v_7 poistetaan, ja vastaavasti solmujen v_1, v_2 ja v_3 asteiden tulisi pysyä muuttumattomana. Kuvasta voidaan kuitenkin havaita, että solmun v_3 aste pienenee yhdellä, jos solmu v_7 poistetaan, ja vastaavasti solmun v_6 aste ei pienene vaikka solmu v_7 poistetaan.



Kuva 10: Korkeimman asteen solmua ei voida poistaa verkosta. [1]

Tarkastellaan tämän vuoksi solmujoukon $\{v_1, \ldots, v_n\}$ kaikkien sellaisten verkkojen joukkoa $\mathcal{G}$, joille jokaisen solmun v_i aste on d_i, kun $i = 1, 2, \ldots, n$. Todistetaan seuraava väite:

Väite 1. Joukossa $\mathcal{G}$ on verkko G_0, missä solmu v_n on viereinen täsmälleen solmuille $v_{n-d_n}, v_{n-d_n+1}, \ldots, v_{n-1}$, eli d_n viimeiselle solmulle.

Jos on olemassa väitteen mukainen verkko G_0, tiedetään, että poistamalla siitä solmu v_n saadaan verkko $G' = (\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}, E')$, missä $E' = \{e \in E(G_0) : v_n \notin e\}$. Tällöin verkon G' astejono on D'. Tämä osoittaa todeksi Lauseen 1.24. Perustellaan seuraavaksi väite.

Jos $d_n = n - 1$, eli v_n on yhdistetty kaikkiin muihin solmuihin, niin mikä tahansa verkko joukosta $\mathcal{G}$ toteuttaa väitteen. Oletetaan siis, että $d_n < n - 1$, ja määritellään verkolle $G \in \mathcal{G}$ luku $j(G)$, joka on suurin mahdollinen indeksi joukosta

$$j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \quad \text{kun} \quad \{v_j, v_n\} \notin E(G).$$

Olkoon verkko $G_0 \in \mathcal{G}$ sellainen verkko, jolla on pienin mahdollinen indeksin arvo $j(G)$. Osoitetaan, että $j(G_0) = n - d_n - 1$, jolloin G_0 toteuttaa väitteen. Tehdään vastaoletus, että $j = j(G_0) > n - d_n - 1$. Tällöin solmun v_n täytyy olla viereinen d_n solmun kanssa, ja enintään $d_n - 1$ kappaleella näistä solmuista voi olla suurempi indeksi kuin solmulla v_j. Näin ollen on olemassa jokin indeksi $i < j$ siten, että solmu v_i on viereinen solmun v_n kanssa, jolloin saadaan $\{v_j, v_n\} \notin E(G_0)$,

$\{v_i, v_n\} \in E(G_0)$. Koska aste $\deg_{G_0}(v_i) \leq \deg_{G_0}(v_j)$, on olemassa solmu v_k, joka on viereinen solmun v_j kanssa, mutta ei viereinen solmun v_i kanssa. Tällöin saadaan uusi verkko $G' = (V, E')$, missä

$$E' = (E(G_0) \setminus \{\{v_i, v_n\}, \{v_j, v_k\}\}) \cup \{\{v_j, v_n\}, \{v_i, v_k\}\}$$

Tästä on helppo huomata, että verkolla G' on myös astejono D, ja samanaikaisesti $j(G') \leq j(G_0) - 1$, mikä on ristiriidassa verkon G_0 valinnan kanssa. Tämän vuoksi vastaväite on väärä, ja alkuperäinen väite pätee, joten näin ollen myös lause pätee.

□

1.4 Eulerin polut ja verkot

Määritelmä 1.25. Eulerin kululla verkossa G tarkoitetaan sellaista kulkua, joka kulkee verkon jokaisen solmun kautta ja jokainen kaari esiintyy täsmälleen kerran.

Määritelmä 1.26. Eulerin verkoksi kutsutaan sellaista verkkoa $G(V, E)$, joka sisältää suljetun Eulerin kulun

$$(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0),$$
$$\text{missä} \quad v_i \in V, \quad e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E \quad \text{kun} \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Suljettu Eulerin kulku käy läpi kaikki verkon solmut $\{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$ palaten lopuksi lähtösolmuun v_0, ja jokainen kaari esiintyy täsmälleen kerran.

2 Eulerin verkkojen karakterisointi

Tässä luvussa tarkastellaan edellä määriteltyä Eulerin verkkoa hiukan yksityiskohtaisemmin. Esitetään lause Eulerin verkkojen karakterisoimiseksi, sekä todistetaan lause kahdella eri tavalla. Tarkastellaan kuitenkin ensin hieman yleisempää Eulerin kulkuihin liittyvää tulosta, joka juontaa juurensa Königsbergin siltaongelmaan ja Eulerin siihen esittämään ratkaisuun. Königsbergin siltaongelmaa on tarkasteltu luvussa 3 esimerkissä 3.7.

Lause 2.1. *Yhtenäisessä verkossa on Eulerin kulku jos ja vain jos siinä on tasan kaksi paritonasteista solmua. [3]*

Eulerin alkuperäinen perustelu löytyy englanniksi käännettynä teoksesta [4]. Koska tässä työssä tarkoitus on keskittyä varsinaisiin Eulerin verkkoihin, esitetään seuraavassa Eulerin kulkuihin liittyvän lauseen todistuksen idea sanallisesti, mutta jätetään tarkempi asiaan perehtyminen lukijalle.

Todistus. On selvää, että jos Eulerin kulku saapuu johonkin solmuun, jonka aste on parillinen, sen on myös lähdettävä siitä. Näin ollen voidaan päätellä, että kulun ensimmäisen solmun asteen on oltava pariton. Samoin jos kulku päättyy johonkin solmuun, myös tämän solmun asteen on oltava pariton, sillä muuten päätesolmusta olisi vielä yksi kaari, jota ei ole kuljettu. Näin ollen paritonasteisten solmujen on välttämättä oltava alku tai päätesolmuja Eulerin kululle. Koska tarkasteltava verkko on yhtenäinen, ja siinä on Eulerin kulku, ei verkossa voi olla paritonasteisia solmuja enempää kuin täsmälleen kaksi. Jos paritonasteisia solmuja olisi enemmän kuin kaksi, täytyisi Eulerin kulun joko alkaa useammasta kuin yhdestä solmusta, tai vastaavasti päättyä useampaan kuin yhteen solmuun, mikä ei ole mahdollista. □

Lause 2.2 (Eulerin verkkojen karakterisointi)**.** *Verkko $G = (V, E)$ on Eulerin verkko, jos ja vain jos se on yhtenäinen ja jokainen solmu on parillisasteinen.*

Todistus. Osoitetaan, että ehdot ovat välttämättömiä, jotta verkko G olisi Eulerin verkko. Selvästi Eulerin verkon tulee olla yhtenäinen. Lisäksi kaikkien solmujen tulee olla parillisasteisia, sillä kun suljettu Eulerin kulku saapuu solmukohtaan, sen täytyy myös lähteä siitä. Jos kiinnitetään jokin kulkusuunta suljetulle Eulerin kululle ja tarkastellaan erästä solmukohtaa $v \in V(G)$ kaaret, jotka kulkevat solmun v kautta, voidaan luokitella joko "tuleviksi"tai "lähteviksi".

Osoitetaan seuraavaksi, että yhtenäisessä parillisasteisessa verkossa on suljettu Eulerin kulku. Tarkastellaan verkossa G olevaa kulkua T, jossa jokainen kaari e_i esiintyy korkeintaan yhdesti. Määritellään kulku

$$T = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_m, v_m)$$

siten, että sen pituus m on suurin mahdollinen. Todistetaan seuraavat väitteet:

i) $v_0 = v_m$ ja

ii) $\{e_i : i = 1, 2, \ldots, m\} = E$.

Väite i). Todistetaan väite tekemällä vastaoletus $v_0 \neq v_m$. Tällöin solmu v_0 kuuluu parittomaan määrään kulun T kaaria. Koska solmun v_0 aste $\deg_G(v_0)$ on kuitenkin parillinen, niin on olemassa kaari $e \in E(G)$, joka ei kuulu kulkuun T. Näin ollen voimme laajentaa kulkua T tällä kaarella ja kulun pituudeksi saadaan $m + 1$, jolloin m ei voi olla suurin mahdollinen kulun pituus. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten vastaväite on väärä ja alkuperäinen väite pätee. Näin ollen $v_0 = v_m$.

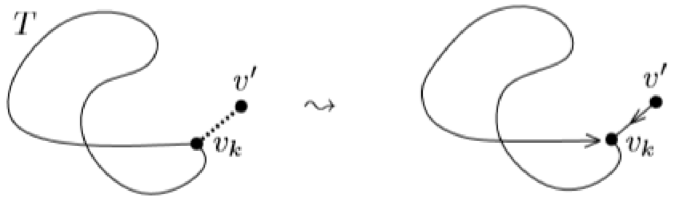
Väite ii). Kohdan i) perusteella oletetaan, että $v_0 = v_m$. Käytetään kulkuun T kuuluvien solmujen joukolle merkintää $V(T)$ ja kaarien joukolle merkintää $E(T)$. Oletetaan ensiksi, että $V(T) \neq V$. Koska nyt tarkasteltava verkko G on yhtenäinen, täytyy verkossa olla sellainen kaari, joka on muotoa

$$e = \{v_k, v'\} \in E(G), \quad \text{missä} \quad v_k \in V(T) \quad \text{ja} \quad v' \notin V(T).$$

Tässä tapauksessa kulun

$$(v', e, v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$$

pituus on $m + 1$, mikä johtaa ristiriitaan oletuksen kanssa. Tilannetta havainnollistaa seuraava kuva:

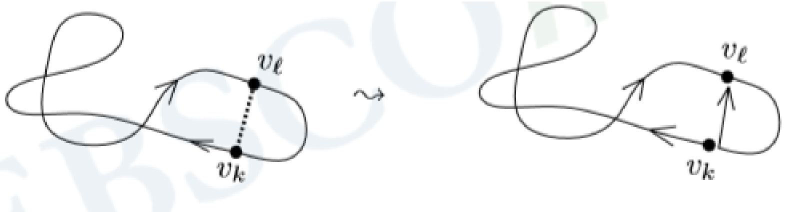


Kuva 11: Jos solmu $v' \notin V(T)$, kun verkko G on yhtenäinen, kulun T pituuden on oltava $m + 1$. [1]

Jos taas $V(T) = V$ ja $E(T) \neq E$, tarkastellaan kaarta $e \in E \setminus E(T)$, ja merkitään $e = \{v_k, v_l\}$. Vastaavasti kuten edellä, saadaan nyt uudeksi kuluksi

$$(v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k, e, v_l),$$

mikä johtaa ristiriitaan, sillä kulun pituus on jälleen suurempi kuin m. Tilannetta havainnollistaa seuraava kuva:



Kuva 12: Jos kaari $e \in E \setminus E(T)$, kulun pituudeksi saadaan jälleen $m + 1$. [1]

Näin ollen joukko $\{e_i : i = 1, 2, \ldots, m\} = E$, eli kulun T kaaret yhtenevät verkon G kaarijoukon $E(G)$ kanssa. Näin ollen väite on tosi. $\square$

Lemma 2.3. *Jos verkossa $G(V, E)$ kaikki asteet ovat parillisia, niin kaarijoukko E voidaan jakaa sellaisiin erillisiin osajoukkoihin $E_1, E_2, \ldots, E_k$, että jokainen joukko E_i on syklin kaarijoukko.*

Todistus. Osoitetaan väite induktiolla kaarien lukumäärän $|E|$ suhteen. Selvästi kun $E = \emptyset$, väite pätee. Induktioaskeleena riittää osoittaa, että verkko G sisältää ainakin yhden syklin. Merkitään tällaisen syklin kaarijoukkoa E_1. Syklissä kaikkien solmujen aste on 2, koska jokaisesta solmusta lähte yksi kaari ja jokaiseen solmuun tulee yksi kaari. Näin ollen joukon E_1 kaikki asteet ovat parillisia, jolloin myös verkossa $(V, E \setminus E_1)$ on kaikki asteet parillisia. Näin ollen kaarijoukko voidaan induktio-oletuksen nojalla jakaa sykleihin.

Seuraavaksi etsitään sykliä verkossa G, kun oletetaan että $E \neq \emptyset$. Konstruoidaan polku verkossa G, ja poimitaan tätä varten mielivaltainen solmu v_0, jonka aste on nollasta eroava. Valitaan sellainen kaari e_1, jonka toinen päätepiste on solmu v_0. Näin ollen saadaan ensimmäinen polku (v_0, e_1, v_1). Jatkamalla edelleen samalla tavoin, saadaan konstruoitua määritelmän 1.12 mukainen polku $(v_0, e_1, \ldots, v_{i-1}, e_i, v_i)$.

Tarkastellaan seuraavaksi, onko solmu v_i vierekkäinen millekään konstruoidun polun solmulle v_j, kun $0 \leq j \leq i-2$. Jos löydetään tällainen solmu v_j, niin kaari $\{v_i, v_j\}$ ja konstruoidun polun osa solmujen v_j ja v_i välillä muodostavat halutun syklin. Jos taas solmu v_i ei ole viereinen millekään solmulle v_j, kun $0 \leq j \leq i-2$, niin voimme lisätä polkuun kaaren $e_{i+1} = \{v_i, v_{i+1}\}$, sillä solmu v_{i-1} ei ole ainoa viereinen solmu solmun v_i kanssa. Jos näin olisi, solmun v_i aste olisi 1, joka ei ole parillinen luku. Tämä ei ole mahdollista, koska kaikkien asteiden on oltava parillisia.

Koska äärellisessä verkossa polun pituus ei voi olla ääretön, niin jatkamalla edellä kuvattua prosessia löydetään ennen pitkää sykli. Näin ollen lemma on tosi. □

Lauseen toinen todistus. Todistetaan lause 2.2 vielä toisella tavalla käyttäen hyväksi edellä todistettua lemmaa 2.3. Osoitetaan, että kaikissa yhtenäisissä verkoissa, joissa kaikkien solmujen asteet ovat parillisia, on suljettu Eulerin kulku. Jaetaan annettu parillisasteinen ja yhtenäinen verkko $G = (V, E)$ erillisiin syklien kaarijoukkoihin $E_1, E_2, \ldots, E_k$ lemman 2.3 nojalla. Yhdistetään nämä syklit suljetuksi Eulerin kuluksi lisäämällä joukot yksitellen toisiinsa. Osoitetaan seuraava väite:

Väite 2. Olkoon $G = (V, E)$ yhtenäinen verkko, ja $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_l$, $l > 1$, missä $E_i \cap E_j = \emptyset$, kun $i \neq j$. Koska joukot E_i ovat erillisten syklien kaarijoukkoja, jokainen joukko E_i sisältää yhden suljetun kulun. Lisäksi on olemassa jokin sellainen indeksi $i \neq 1$, jolla saadaan kaarijoukko $E_1 \cup E_i$, joka sisältää myös yhden suljetun kulun.

Käyttämällä edellä esitettyä väitettä toistuvasti, saadaan alkuperäiset k sykliä liitettyä suljetuksi Eulerin kuluksi. Todistetaan seuraavaksi väite.

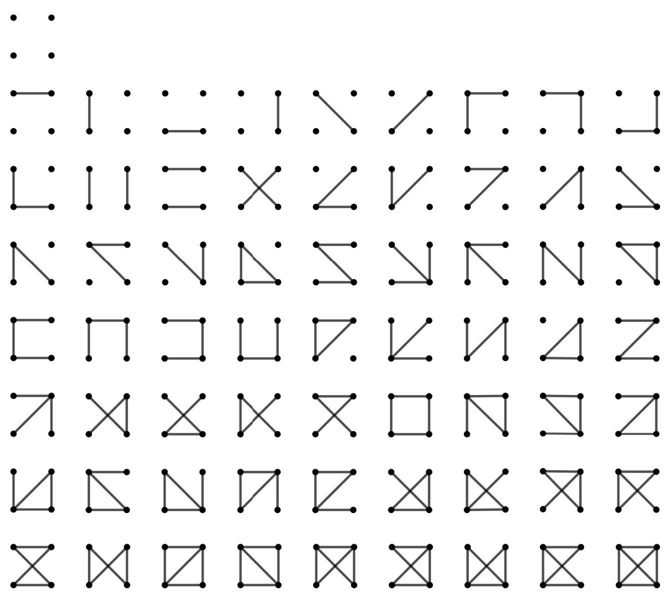
Merkitään symbolilla V_i kaikkien sellaisten solmujen joukkoa, jotka sisältyvät ainakin yhteen joukon E_i kaareen. Riittää osoittaa, että on olemassa sellainen indeksi $i \neq 1$, jolla $V_1 \cap V_i \neq \emptyset$. Tällöin suljetut kulut joukoissa E_1 ja E_i voidaan liittää yhteen yhdeksi suljetuksi kuluksi, sillä joukkojen leikkauksessa täytyy olla ainakin yksi yhteinen solmu. Suljettujen kulkujen liittämistä toisiinsa on havainnollistettu seuraavassa kuvassa:

Kuva 13: Suljettujen kulkujen yhdistäminen, kun leikkaus $V_1 \cap V_i \neq \emptyset$. [1]

Tehdään seuraavaksi vastaoletus: $V_1 \cap (V_2 \cup V_3 \cup \cdots \cup V_k) = \emptyset$. Tämä tarkoittaa, että ei ole olemassa sellaista solmua, joka yhdistää joukot V_1 ja $V_2 \cup V_3 \cup \cdots \cup V_k$ toisiinsa. Tällöin verkko G ei voi olla yhtenäinen, koska jokin verkon kaarista ei kuuluisi joukkoihin E_i. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, joten vastaoletus on väärä ja alkuperäinen väite pätee. □

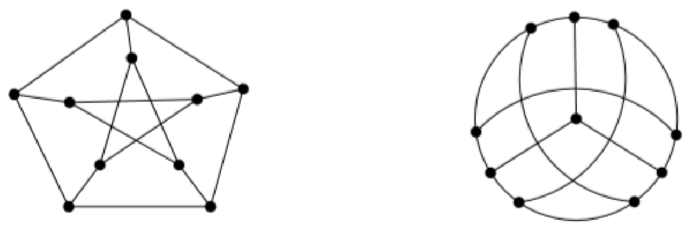
3 Esimerkkejä

Esimerkki 3.1. Koska 4-solmuisesta joukosta voidaan muodostaa kaaria $\binom{4}{2} = 6$ eri tavalla, kaikkien erilaisten 4-solmuisten verkkojen lukumäärä on yhteensä $2^{\binom{4}{2}} = 64$ kpl. Tällaiset verkot on esitetty seuraavassa kuvassa:

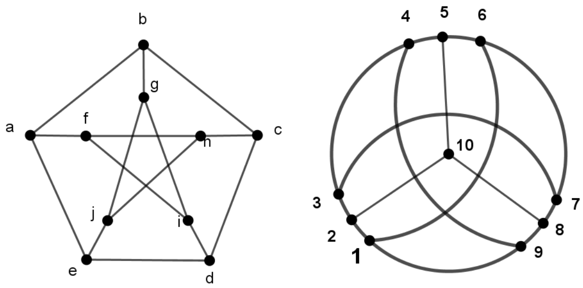


Kuva 14: Kaikkien erilaisten 4-solmuisten verkkojen lukumäärä on yhteensä 64 kappaletta.

Esimerkki 3.2. Tarkastellaan kahta verkkoa



Etsitään isomorfismi yllä olevien verkkojen välillä. Nimetään tätä varten verkkojen solmut seuraavasti:



Koska isomorfismi säilyttää vierekkäiset solmut vierekkäisinä ja kaarien lukumäärän muuttumattomana, saadaan verkkojen välille isomorfismi, kun solmut kuvataan seuraavasti:

$$a \to 10; \quad b \to 2; \quad c \to 1; \quad d \to 6; \quad e \to 5;$$
$$f \to 8; \quad g \to 3; \quad h \to 9; \quad i \to 7 \quad j \to 4.$$

Vastaavasti verkon kaaret voidaan nimetä solmujen avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} E =& \{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,e\},\{e,a\},\{a,f\},\{f,h\},\{f,i\},\{b,g\},\{g,j\},\\ &\{g,i\},\{c,h\},\{h,j\},\{d,i\},\{e,j\}\} \\ E =& \{\{10,2\},\{2,1\},\{1,6\},\{6,5\},\{5,10\},\{10,8\},\{8,9\},\{8,7\},\{2,3\},\{3,4\},\\ &\{3,7\},\{1,9\},\{9,4\},\{6,7\},\{5,4\}\}. \end{aligned}$$

[1, Teht.1a), s. 116]

Esimerkki 3.3 (Isomorfisten verkkojen lukumäärä)**.** Olkoon solmujoukko $V = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$. Tarkastellaan joukosta V muodostettujen sellaisten verkkojen lukumäärää, jotka ovat määritelmän 1.8 mukaisesti isomorfisia verkolle G, jossa on n kpl kaaria, ja kaikki verkon kaaret ovat erillisiä, eli millään kaarilla ei ole yhteisiä solmuja.

Koska isomorfismi säilyttää verkon kaarien lukumäärän muuttumattomana, joukosta V muodostetuista verkoista vain sellaiset ovat isomorfisia, joissa on täsmälleen n kappaletta kaaria. Lisäksi isomorfismi säilyttää vierekkäiset solmut vierekkäisinä, joten niin ikään isomorfisissa verkoissa täytyy myös kaarien olla erillisiä. Lähdetään lisäämään solmujoukkoon V kaaria yksitellen, ja tarkastellaan erilaisten vaihtoehtojen lukumäärää. Koska solmujoukon V kaikki solmut tulevat kuulumaan johonkin kaareen, kaarien lisäämisjärjestyksellä ei ole merkitystä. Aloitetaan tarkastelu kiinnittämällä mielivaltainen solmu v_0 joukosta V. Nyt tämä solmu voidaan yhdistää kaarella $(2n-1)$ eri solmuun v_1 joukosta $V \setminus \{v_0\}$. Lisätään seuraavaksi toinen kaari solmujoukkoon V. Koska nyt kaarien täytyy olla erillisiä, eli niillä ei saa olla yhteisiä solmuja, voidaan jälleen valita mielivaltainen solmu v_2 nyt joukosta $V \setminus \{v_0, v_1\}$.

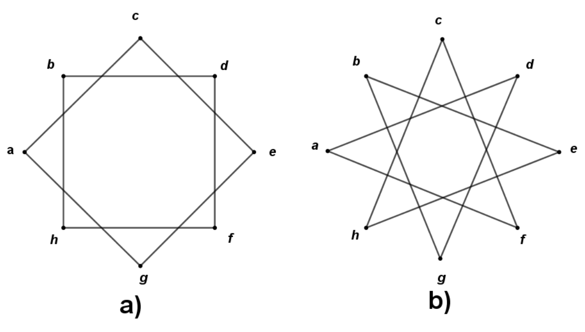
Nyt tämä solmu on mahdollista yhdistää $(2n-3)$ eri solmuun siten että muodostuvalla kaarella ei ole yhteisiä solmuja verkossa jo olevan kaaren kanssa. Jatketaan kaarien lisäämistä, kunnes viimeisenä lisätään n. kaari verkkoon. Tällöin solmujoukossa V on jäljellä enää kaksi alkiota, joten viimeinen kaari voidaan valita täsmälleen yhdellä tavalla. Tämän perusteella joukosta V muodostettujen erilaisten isomorfisten verkkojen lukumääräksi saadaan

$$
\begin{aligned}
&(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-(2(n-3)+1))(2n-(2(2-2)+1))\\
&(2n-(2(n-1)+1))\\
&=(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2n+5)(2n-2n+3)(2n-2n+1)\\
&=(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3.
\end{aligned}
$$

[1, teht. 6, s. 118]

Esimerkki 3.4. Alla olevassa kuvassa on esitetty kaksi verkkoa, joiden solmujoukko on sama. Vasemmanpuoleinen verkko a) koostuu kahdesta komponentista (määritelmä 1.17), joiden solmujoukot ovat $\{a, c, e, g\}$ ja $\{b, d, f, h\}$. Molemmat komponentit ovat yhtenäisiä, sillä komponenttiin kuuluvien solmujen välillä on yhteys kaarien välityksellä. Sen sijaan eri komponentteihin kuuluvien solmujen välillä ei ole yhtään kaarta, joten verkko ei ole yhtenäinen.

Kuvassa b) oleva verkko koostuu yhdestä komponentista, jonka solmujoukko on verkon solmujoukko $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Verkon kaikki solmut kuuluvat yhteen sykliin, ja verkossa on kaarien välityksellä yhteys minkä tahansa kahden verkon solmun välillä. Näin ollen verkko on yhtenäinen määritelmän 1.13 nojalla.



Kuva 15: Verkko a) on epäyhtenäinen, ja verkko b) on yhtenäinen.

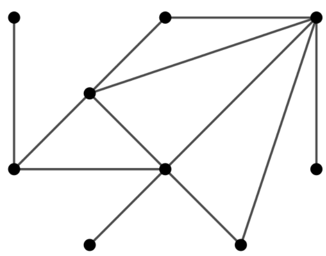
Esimerkki 3.5 (Aste)**.** Tarkastellaan onko olemassa sellaista verkkoa, jonka aste on $D = (1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5)$. Muodostetaan ensiksi lauseen 1.24 mukainen verkon aste D'. Nyt astejonossa D on $d_n = 5$ ja $n = 9$, joista saadaan $n - d_n = 9 - 5 = 4$. Muodostetaan astelausetta käyttäen jono D', jossa asteet d'_1, d'_2, d'_3 ovat samat kuin asteet d_1, d_2, d_3, ja asteet $d'_4, d'_5, \ldots, d'_8$ saadaan asteista $d_4, d_5, \ldots, d_8$ vähentämällä asteista luku 1. Näin ollen saadaan uusi astejono

$$D' = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4).$$

Käytetään astelausetta vastaavalla tavalla vielä kolme kertaa, ja järjestetään asteet aina pienimmästä suurimpaan, jolloin saadaan seuraavat astejonot:

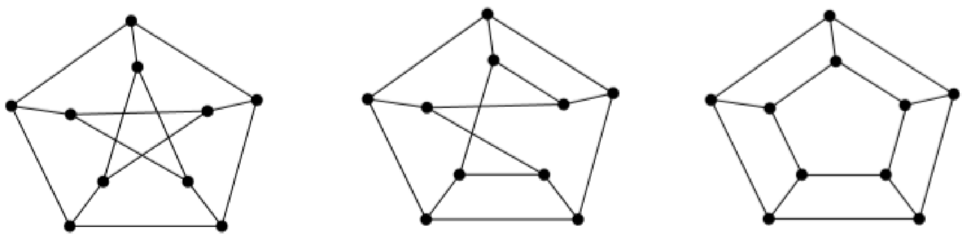
$$\begin{aligned}
D'' &= (1, 1, 1, 0, 0, 1, 2) \quad \Rightarrow \quad (0, 0, 1, 1, 1, 1, 2) \\
D^{(3)} &= (0, 0, 1, 1, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad (0, 0, 0, 0, 1, 1) \\
D^{(4)} &= (0, 0, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

Nyt astejono $D^{(4)}$ on sellaisen verkon aste, jossa on viisi solmua ja ei yhtään kaarta. Näin ollen lauseen 1.24 nojalla myös D on jokin verkon aste. Yksi esimerkki tällaisesta verkosta on esitetty seuraavassa kuvassa:



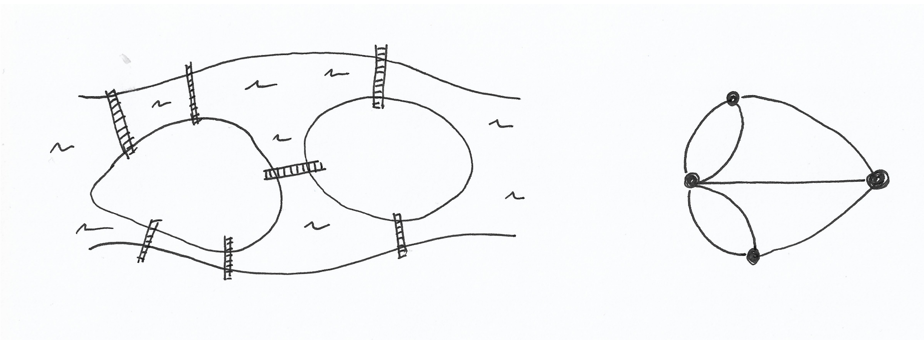
[1, Luku 4.3, s. 218]

Esimerkki 3.6. Tarkastellaan seuraavia kolmea verkkoa, joiden asteet ovat samat. Osoitetaan, että verkot ovat parittain epäisomorfisia.

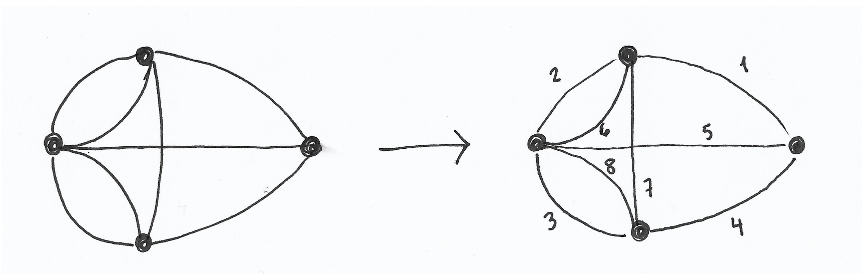


Nyt jokaisessa verkossa kaikkien solmujen aste on 3. Koska isomorfsmi säilyttää vierekkäiset solmut vierekkäisinä ja ja solmujoukon samana, täytyy isomorfisissa verkoissa olla symmetrian nojalla täsmälleen sama määrä saman pituisia syklejä. Nyt voidaan huomata, että vasemmanpuolimmaisessa verkossa lyhin syklin pituus on 5, keskimmäisessä verkossa taas on 2 kappaletta syklejä, joiden pituus on 4, ja oikeanpuolimmaisessa verkossa taas 4-pituisia syklejä on 5 kappaletta. Näin ollen mikään verkoista ei ole isomorfinen muiden kanssa. [1, Teht. 1, s. 129]

Esimerkki 3.7 (Königsbergin siltaongelma)**.** Tarkastellaan Königsbergin siltaongelmaa, josta Eulerin verkot ovat saaneet alkunsa. Seuraava piirros kuvaa Königsbergin siltojen ja saarien muodostamaa kokonaisuutta, ja siitä piirrettyä verkkomallia, jossa mantereita on merkitty solmuilla ja siltoja kaarilla:

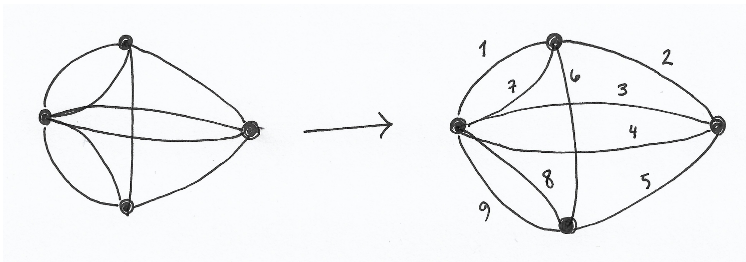


Ongelmallinen kysymys oli, onko reittiä mahdollista kulkea siten, että jokainen silta ylitetään täsmälleen kerran, eli toisin sanoen onko verkossa määritelmän 1.25 mukaista Eulerin kulkua. Lauseen 2.1 perusteella voidaan havaita, että reittiä ei ole mahdollista kulkea näin, koska muodostuvassa verkossa on yhteensä neljä paritonasteista solmua. Jos verkossa olisi vain kaksi paritonasteista solmua, siinä olisi Eulerin kulku. Näin ollen riittää, että verkkoon lisätään yksi kaari eli silta, jolloin siihen saadaan muodostettua Eulerin kulku esimerkiksi seuraavalla tavalla:

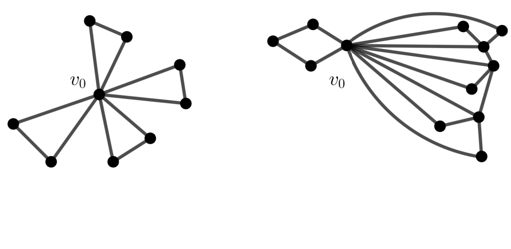


Määritelmän 1.26 nojalla Eulerin verkossa on suljettu Eulerin kulku, joka käy läpi jokaisen verkon solmun ja jokainen kaari esiintyy täsmälleen kerran. Lisäksi alkupiste ja loppupiste ovat samat. Jos Königsbergin siltoja kuvaavassa verkossa olisi suljettu Eulerin kulku, se olisi mahdollista kulkea siten, että jokainen silta kuljetaan kerran, ja lopuksi palattaisiin takaisin lähtöpisteeseen. Lauseen 2.2 nojalla verkko on Eulerin verkko, jos ja vain jos se on yhtenäinen ja kaikkien solmujen asteet ovat parillisia. Nyt tarkasteltava Königsbergin siltoja kuvaava verkko on yhtenäinen, mutta kaikkien solmujen asteet ovat parittomia. Näin ollen verkko ei voi olla Eulerin verkko, joten verkossa ei voi olla suljettua Eulerin kulkua. Siten voidaan todeta, että reittiä ei ole mahdollista kulkea edellä kuvatulla tavalla.

Tarkastellaan seuraavaksi, miten verkosta saadaan sellainen, että siinä olisi suljettu Eulerin kulku. Koska lauseen 2.2 nojalla Eulerin verkon solmujen asteet ovat parillisia, voidaan huomata, että verkkoon saadaan suljettu Eulerin kulku, jos siihen lisätään kaksi siltaa siten että kaikkien solmujen asteet ovat parillisia. Tällöin verkkoa ja siinä olevaa suljettua polkua kuvaa seuraava piirros:

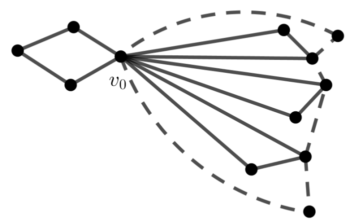


Esimerkki 3.8. Verkko $G = (V, E)$ on satunnaisesti Euleriaaninen alkaen solmusta v_0, jos jokainen solmusta v_0 alkava maksimipituinen kulku on suljettu Eulerin kulku verkossa G. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että valittaessa satunnainen solmusta v_0 alkava kaari, ja sitä seuraavat kaaret joita ei vielä ole kuljettu, päädytään aina takaisin solmuun v_0. Tätä jatkamalla on lopulta kuljettu kaikki verkon kaaret ja palattu takaisin lähtöpisteeseen. Käytännössä tällaisessa verkossa ei ole siis mahdollista joutua umpikujaan. Osoitetaan, että seuraavat verkot ovat satunnaisesti Euleriaanisia.



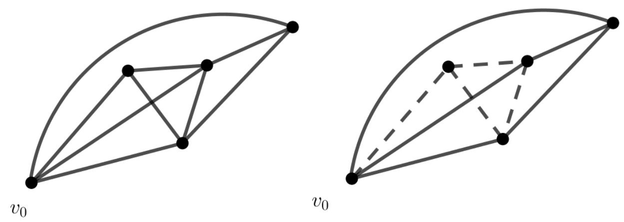
Nyt ensimmäisessä verkossa solmusta v_0 alkaa neljä erillistä 3-pituista sykliä, jotka kaikkia palaavat takaisin solmuun v_0. Nämä syklit voidaan yhdistää yhdeksi suljetuksi Eulerin kuluksi, ja kaikki verkon solmut ja kaaret kuuluvat tähän suljettuun kulkuun. Näin ollen verkko on satunnaisesti Euleriaaninen.

Toisessa verkossa erillisiä syklejä, joissa mikään verkon kaari ei toistu, on yhteensä 5 kappaletta. Verkkoon voidaan esimerkiksi muodostaa yksi 6-pituinen sykli seuraavasti:



Tämän jälkeen verkossa on vielä 3 kappaletta erillisiä 3-pituisia syklejä ja yksi 4-pituinen sykli. Erilliset syklit voidaan muodostaa verkkoon myös eri tavalla, mutta aina riippumatta niiden valinnasta, voidaan myös tämän verkon tapauksessa syklit yhdistää yhdeksi suljetuksi Eulerin kuluksi, jonka pituus on suurin mahdollinen, ja joka sisältää kaikki verkon solmut ja jokaisen kaaren täsmälleen kerran. Näin ollen verkko on satunnaisesti Euleriaaninen alkaen solmusta v_0.

Seuraava verkko sen sijaan ei ole satunnaisesti Euleriaaninen, koska siinä on mahdollista kulkea esimerkiksi alla olevaan kuvaan katkoviivoin merkitty reitti, joka ei pääty takaisin lähtösolmuun v_0. Näin ollen verkossa on mahdollista päätyä umpikujaan valittaessa kaaret sopivalla tavalla.



4 Muita tuloksia

Tähän saakka olemme määritelleet verkon yksittäisen kaaren kahden solmun muodostaman joukon avulla. Lisäksi olemme keskittyneet tarkastelemaan tapauksia, joissa kaksi verkon solmua voidaan yhdistää enintään yhdellä kaarella. Toisinaan on kuitenkin tarpeen yhdistää kaksi solmua useilla erillisillä kaarilla. Tällaisia verkkoja kutsutaan moninkertaisiksi verkoiksi *(multigraphs)*. Tämä voidaan matemaattisesti määritellä esimerkiksi seuraavasti:

Määritelmä 4.1 (Moninkertainen verkko)**.** Olkoon $m(u, v)$ ei-negatiivinen kokonaisluku jokaiselle solmuparille $\{u, v\}$. Tällöin $m(u, v)$ on kaaren $\{u, v\}$ monikerta. Jos $m(u, v) = 0$, verkossa ei ole kyseistä kaarta. Jos $m(u, v) = 1$, kaari on yksinkertainen, kuten tähän saakka tarkastelluissa tilanteissa. Jos $m(u, v) > 1$, voidaan sanoa, että verkko sisältää $m(u, v)$ kappaletta monikertoja kaaresta $\{u, v\}$. Moninkertainen verkko on tällöin järjestetty pari (V, m), missä

$$m : \binom{V}{2} \to \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Vaihtoehtoinen tapa on määritellä kaaret abstrakteina objekteina, jolloin kaarijoukko E voidaan ajatella äärellisenä ja erillisenä joukkona solmujoukosta V. Jokaiselle kaarijoukon kaarelle $e \in E$ määritellään kaaren e päätesolmujen muodostama pari. Sama solmupari voi esiintyä useammassa kaaressa. Moninkertaisia kaaria sisältävä verkko on tällöin järjestetty kolmikko (V, E, ε), missä V ja E ovat erillisiä joukkoja, ja $\varepsilon : E \to \binom{V}{2}$ on kuvaus, joka määrittelee kaaren päätesolmut.

Huomautus 4.2. Itse asiassa myös esimerkissä 3.7 esitetty Königsbergin siltoja kuvaava verkko on moninkertainen verkko, mutta tällä ei ole merkitystä esitetyn ratkaisun kannalta, sillä tarkastelu suoritetaan samalla tavalla.

Toisinaan on tarpeen sallia myös silmukat verkossa. Silmukalla tarkoitetaan kaarta, jolla on sama alku- ja päätesolmu. Myös silmukat voidaan määritellä monin eri tavoin. Yksinkertaisin tapa on määritellä kaarijoukkoon E kuuluva silmukka 1-alkioiseksi joukoksi $\{v\}$, kun tavallisesti kaaret määritellään kaksialkioisten joukkojen avulla. Jos verkon moninkertaiset kaaret esitetään kuvauksella ε, kuten edellä on esitetty, voidaan verkkoon lisätä silmukoita määrittelemällä kuvaus $\varepsilon : E \to \binom{V}{2} \cup V$. Tässä tapauksessa silmukka e kuvataan sen ainoaan päätesolmuun.

4.1 Suunnattu Eulerin verkko

Määritelmä 4.3. Suunnattu verkko (*directed graph*) on kolmikko $G = (V, E, p)$, missä V on solmujoukko, E on kaarijoukko, ja

$$p : E \to V^2$$

on kuvaus, joka kuvaa jokaisen verkon kaaren kahden solmun muodostamaksi järjestetyksi pariksi. Suunnatun verkon kaaret merkitään nuolilla, jotka osoittavat kaarien kulkusuunnan.

Määritelmä 4.4 (Suunnattu kulku)**.** Suunnattu kulku verkossa $G = (V, E)$ on jono

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_m, v_m),$$

missä

$$e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E \quad \text{ja} \quad e_i = \{v_i, v_{i-1}\} \notin E, \quad \text{kaikilla} \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

Vastaavasti voidaan määritellä suunnattu polku ja sykli.

Suunnattu verkko $G = (V, E)$ on Eulerin verkko, mikäli verkossa on suljettu ja suunnattu kulku, joka sisältää kaikki verkon solmut ja käy läpi kaikki verkon suunnatut kaaret eli nuolet täsmälleen kerran. Esitetään seuraavaksi muutamia tuloksia, joita tarvitaan Eulerin suunnatun verkon määrittelemiseksi.

Olkoon v mielivaltainen solmu suunnatussa verkossa $G = (V, E)$. Merkitään solmuun v tulevien suunnattujen nuolien, eli tässä tapauksessa nuolen kärkien lukumäärää $\deg_G^+(v)$, ja käytetään tälle nimitystä maaliaste. Vastaavasti merkitään solmusta v lähtevien suunnattujen nuolien lukumäärää $\deg_G^-(v)$ ja käytetään tälle nimitystä lähtöaste.

Jokainen suunnattu verkko $G = (V, E)$ voidaan samaistaa suuntaamattoman verkon $\mathrm{sym}(G) = (V, \overline{E})$ kanssa, missä

$$\overline{E} = \{\{x, y\} : (x, y) \in E \quad \text{tai} \quad (y, x) \in E\}.$$

Verkkoa $\mathrm{sym}(G)$ kutsutaan verkon G symmetrisaatioksi.

Lemma 4.5. *Suunnattu verkko on Eulerin verkko, jos ja vain jos sen symmetrisaatio on yhtenäinen ja* $deg_G^+(v) = deg_G^-(v)$ *kaikilla solmuilla* $v \in V(G)$.

Todistus. Todistus on pitkälti samanlainen kuin lauseen 2.2 todistus.

Oletetaan ensiksi, että suunnattu verkko G on Eulerin verkko. Tällöin verkossa G täytyy olla suunnattu polku mistä tahansa verkon solmusta johonkin toiseen verkon solmuun. Nämä polut kuuluvat verkossa olevaan suljettuun Eulerin kulkuun. Näin ollen tiedetään, että myös verkossa $\mathrm{sym}(G)$ on olemassa polku mistä tahansa verkon solmusta johonkin toiseen verkon solmuun. Koska suunnatussa Eulerin verkossa jokaiseen solmuun saapuva nuoli myös lähtee pois solmusta, jokaisen solmun maaliaste on välttämättä sama kuin sen lähtöaste. Siis väite sym(G) on yhtenäinen, ja $\deg_G^+(v)$ $=\deg_G^-(v)$ pätee kaikilla verkon G solmuilla v.

Oletetaan seuraavaksi, että sym(G) on yhtenäinen, ja $\deg_G^+(v)$ $=\deg_G^-(v)$. Määritellään verkossa kulku $T = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_m, v_m)$ siten, että kulun pituus m on suurin mahdollinen. Todistetaan seuraavat väitteet:

i) $v_0 = v_m$ ja

ii) $\{e_i : i = 1, 2, \ldots, m\} = E$.

Väite i) Tehdään vastaoletus $v_0 \neq v_m$. Tällöin kulku T saapuu solmuun, mutta se ei poistu solmusta. Tässä tapauksessa solmun v_m maaliaste $\deg_G^+(v_m)$ olisi yhden suurempi kuin solmun lähtöaste $\deg_G^-(v_m)$. Oletuksen nojalla kuitenkin maaliasteen ja lähtöasteen on oltava yhtä suuria. Näin ollen täytyy olla olemassa kaari e, joka ei kuulu kulkuun T. Tässä tapauksessa m ei voi olla suurin mahdollinen kulun pituus, mikä johtaa ristiriitaan oletuksen kanssa. Näin ollen vastaväite on väärä ja alkuperäinen väite $v_0 = v_m$ pätee.

Väite ii) Oletetaan nyt edellä todistettu väite $v_0 = v_m$ todeksi. Osoitetaan seuraavaksi, että kulku T käy läpi kaikki verkon solmut ja kaaret. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan kulkuun T kuuluvien solmujen joukko $V(T) \neq V(\mathrm{sym}(G))$. Koska verkon G symmetrisaatio on yhtenäinen, täytyy tällöin verkossa sym(G) olla kaari, joka on muotoa

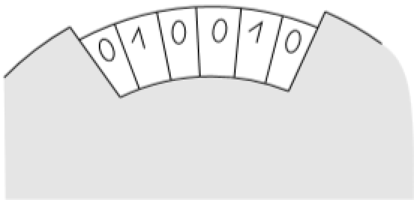
$$e = \{v_k, v'\} \in E(G), \quad \text{kun} \quad v_k \in V(T) \quad \text{ja} \quad v' \notin V(T).$$

Nyt kaari $e = \{v_k, v'\}$ ei voi kuulua kulkuun T, koska $v' \notin V(T)$. Näin ollen m ei voi olla suurin mahdollinen kulun T pituus verkossa G. Suurin mahdollinen kulun pituus on sen sijaan $m+1$, mikä saadaan liittämällä kaari $\{v_k, v'\}$ kulkuun T. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, jonka mukaan pisin mahdollinen kulun T pituus verkossa G on m.

Vastaavasti jos kulun T kaarijoukko $E(T) \neq E(\mathrm{sym}(G))$, päädytään tarkastelemaan kaarta $e = \{v_k, v_l\} \in E \setminus E(T)$. Tällöin kulun T pituus on jälleen välttämättä suurempi kuin m, koska pisin mahdollinen kulku verkossa saadaan liittämällä kulkuun kaari $e = \{v_k, v_l\}$, jolloin kulun pituus on $m + 1$. Tämä johtaa jälleen ristiriitaan oletuksen kanssa, joten täytyy olla voimassa tulos $E(T) = E(\mathrm{sym}(G))$. Näin ollen kulku T on suljettu Eulerin kulku verkossa sym(G). Koska nyt sym(G) on Eulerin verkko, voidaan sen avulla määrittää suunnattu Eulerin verkko G.

□

Esimerkki 4.6. Kiekon kehälle on sijoitettu n kappaletta lukuja 0 ja 1. Kehältä on mahdollista lukea k kappaletta peräkkäisiä lukuja aukon kautta:



Kuva 16: [1, Luku 4.5, s. 140]

Tarkasteltavan n-pituisen lukujonon tulee olla sellainen, että kehän asento voidaan aina havaita yksiselitteisesti aukossa näkyvien k luvun avulla riippumatta siitä, kuinka kehää pyöritetään. Käytännössä siis kaikkien erilaisten kiekon kehällä olevien k-pituisten osajonojen täytyy olla erilaisia. Olkoon annettu luku k, jolle halutaan valmistaa sellainen kehä, jossa lukujonon n pituus on mahdollisimman suuri, ja kehän asento voidaan määrittää täsmällisesti. Muotoillaan ongelma matemaattisesti seuraavalla tavalla:

Etsi mahdollisimman pitkä syklinen lukujen 0 *ja* 1 *muodostama jono, jossa kaikki mahdolliset k-pituiset peräkkäisistä luvuista muodostuvat osajonot ovat erilaisia. Tässä tapauksessa syklisellä jonolla tarkoitetaan lukujen asettamista ympyrän kehälle.*

Merkitään tällaisen jonon suurinta mahdollista lukujen määrää $l(k)$, jollakin tietyllä arvolla k. Todistetaan seuraava tulos:

Lemma 4.7. *Kaikilla* $k \geq 1$ *pätee* $l(k) = 2^k$.

Todistus. Koska erilaisten k pituisten lukuja 0 ja 1 sisältävien jonojen määrä on 2^k, ei syklisen jonon pituus voi olla tätä suurempi. Jos syklisen jonon pituus olisi tätä suurempi, voisi jokin k-pituinen osajono esiintyä syklisessä jonossa useammin kuin kerran. Näin ollen riittää löytää sellainen syklinen jono, jonka pituus on 2^k, ja joka täyttää annetut ehdot. Tapauksessa $k = 1$ saadaan 2-pituinen jono, jossa on luvut 0 ja 1 täsmälleen kerran, joten oletetaan että $k \geq 2$. Määritellään verkko $G = (V, E)$ seuraavasti:

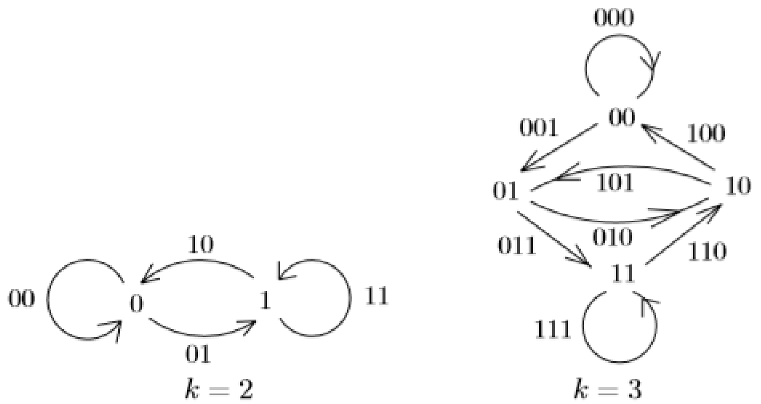
- V on kaikkien $(k-1)$-pituisten lukuja 0 ja 1 sisältävien jonojen muodostama joukko. Siis $|V| = 2^{k-1}$.

- Suunnatut kaaret ovat $(k-1)$-pituisten jonojen muodostamia pareja, jotka ovat muotoa

$$((a_1, \dots, a_{k-1}), (a_2, \dots, a_k)).$$

Koska suunnatut kaaret muodostetaan $k-1$-pituisista pareista siirtymällä syklisessä jonossa yksi pykälä eteenpäin, vastaavat suunnatut kaaret k-pituisia jonoja $(a_1, a_2, \dots, a_k)$. Nyt selvästi $|E| = 2^k$, koska erilaisia k-pituisia jonoja on tämän verran.

Koska lukujonoissa esiintyy vain luvut 0 ja 1, jokaisesta edellä määritetystä joukon V solmusta (joka nyt tarkoittaa siis $(k-1)$-pituista osajonoa), lähtee nuoli kahteen solmuun, joista toinen edustaa tapausta jossa seuraava luku on 0 ja toinen tapausta jossa seuraava luku on 1. Samoin jokaiseen solmuun tulee kaksi nuolta solmuista, jotka edustavat tapauksia, joissa edeltävä luku on 0 tai 1. Näin ollen tiedetään, että jokaisella joukon V solmulla v, $\deg_G^-(v) = \deg_G^+(v) = 2$. Verkon G symmetrisaatio on yhtenäinen, koska poistettaessa toistuvasti $(k-1)$-pituisen lukujonon viimeinen termi, ja lisäämällä jonon alkuun luku 0, saadaan kaikki jonot palautettua jonoksi, jossa esiintyy pelkästään termiä 0. Näin ollen verkko G on Eulerin suunnattu verkko. Seuraavassa kuvassa on havainnollistettu tapauksia $k = 2$ ja $k = 3$.



Kuva 17: [1, Luku 4.5, s. 141]

Asetetaan $K = |E| = 2^k$, ja merkitään verkossa G olevaa suunnattua Eulerin polkua eli lukujonojen muodostamia kaaria $(e^1, \dots, e^K)$. Jokainen kaari e^i on muotoa $e^i = (a_1^i, \dots, a_k^i)$. Nyt haluttu syklinen lukujen 0 ja 1 muodostama K-pituinen kehälle asetettava jono voidaan määritellä asettamalla $(a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^K)$. Muodostettu jono on saatu ottamalla jokaisesta joukosta e^i ensimmäinen alkio. Jokainen k-pituinen peräkkäisten lukujen muodostama osajono tässä jonosta vastaa nyt yhden Eulerin polkuun kuuluvan nuolen kulkemista, ja koska nuolet eivät toistu polussa, mitkään kaksi k:n luvun muodostamat lohkot eivät ole samanlaisia. Näin ollen $l(k) = 2^k$.

Esimerkiksi kuvan tapauksessa $k = 2$ saadaan polku 00, 01, 11, 10 jota vastaava syklinen jono on 0011. Tapauksessa $k = 3$ saadaan polku 000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100 ja tätä vastaava syklinen jono 00011101.

[1, Luku 4.5, s. 139-141] □

4.2 Kahdesti yhtenäiset verkot

Verkkoa G kutsutaan k-solmu yhtenäiseksi, mikäli siinä on ainakin $k+1$ solmua, ja se säilyttää yhtenäisyytensä, vaikka mitkä tahansa $k-1$ solmua poistetaan verkosta. Samoin k-kaariyhtenäisestä verkosta voidaan poistaa mikä tahansa $k-1$ kaaresta, ja verkko säilyy siitä huolimatta yhtenäisenä. Tällaisille tapauksille voidaan käyttää nimityksiä solmuyhtenäisyys ja kaariyhtenäisyys. Moninkertaisesti yhtenäisiä verkkoja hyödynnetään esimerkiksi joukkoliikenteessä, raideliikenteen tietoverkoissa ja puhelinkaapeleissa. Moninkertaisesti yhtenäinen verkko säilyttää toimintakykynsä vaikka yksi tai useampia sen solmuista lakkaisi toimimasta. Näin ollen sen toimintavarmuus on suurempi verrattuna yksinkertaisesti yhtenäiseen verkkoon. Emme tarkastele tässä työssä tarkemmin moninkertaisesti yhtenäisten verkkojen ominaisuuksia. Tutustutaan sen sijaan hieman tarkemmin yksinkertaisimpaan tilanteeseen moninkertaisesti yhtenäisistä verkoista, eli kaksiyhtenäisiin verkkoihin. Määritellään kaksiyhtenäisyys verkossa seuraavasti:

Huomautus 4.8 (Kaksiyhtenäisyys). Verkkoa G kutsutaan kaksiyhtenäiseksi, jos siinä on ainakin kolme solmua ja minkä tahansa yksittäisen solmun poistaminen säilyttää verkon yhtenäisenä.

Kaksiyhtenäisten verkkojen perusteellisempaa tarkastelua varten määritellään seuraavat verkko-operaatiot:

Määritelmä 4.9. Olkoon $G = (V, E)$ verkko. Määritellään erilaisia verkkoja, jotka voidaan saada olemassaolevan verkon G avulla suorittamalla alkuperäiselle verkolle jokin seuraavista verkko-operaatioista.
Kaaren poistaminen:

$$G - e = (V, E \setminus \{e\}),$$

missä $e \in E$ on verkon G kaari.
Uuden kaaren lisääminen:

$$G + \overline{e} = (V, E \cup \{\overline{e}\}),$$

missä $\overline{e} \in \binom{V}{2} \setminus E$ on solmupari, joka ei ole alkuperäisen verkon G kaari.
Solmun poistaminen:

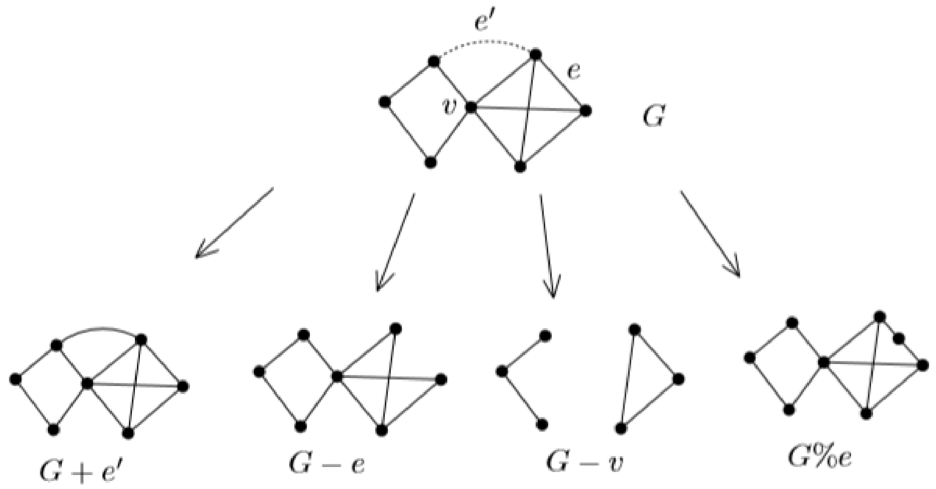
$$G - v = (V \setminus \{v\}, \{e \in E : v \notin e\}),$$

missä $v \in V$. (Huom, poistettaessa solmu v täytyy siis poistaa myös kaikki kaaret, joiden päätepisteenä solmu v on.)
Kaaren alijako:

$$G\%e = (V \cup \{z\}, (E \setminus \{\{x, y\}\}) \cup \{\{x, z\}, \{z, y\}\}),$$

missä $e = \{x, y\} \in E$ on kaari, ja $z \notin V$ on uusi solmu. Käytännössä siis alkuperäisessä verkossa olevaan kaareen lisätään uusi solmu, jolloin alkuperäinen kaari jakautuu kahdeksi uudeksi kaareksi.

Määritelmä 4.10. Verkko G' on verkon G alijako, mikäli G' on isomorfinen sellaisen verkon kanssa, joka saadaan suorittamalla verkolle G perättäisiä kaaren alijakoja.



Kuva 18: Uusien verkkojen muodostaminen verkko-operaatioiden avulla. [1]

Lause 4.11. *Verkko G on kaksiyhtenäinen, jos ja vain jos mitkä tahansa kaksi verkon solmua kuuluvat verkossa G olevaan sykliin.*

Huomautus 4.12. Edellä esitetty lause on tärkeä erikoistapaus tunnetusta Mengerin lauseesta, joka antaa seuraavan tuloksen:

Jos x ja y ovat mitkä tahansa kaksi solmua k-solmuisesti yhtenäisessä verkossa G, niin verkossa on myös olemassa k kappaletta polkuja solmujen x

ja y välillä siten, että kaikki polut ovat keskenään erillisiä lukuunottamatta poluille yhteisiä solmuja x ja y.

Todistus. 1. Annettu ehto on riittävä. Jos kaksi solmua v, v' kuuluvat samaan sykliin, niin välttämättä on olemassa kaksi polkua, jotka yhdistävät ne. Lisäksi poluilla ei ole yhteisiä solmuja lukuunottamatta polkujen päätesolmuja. Näin ollen solmut v ja v' eivät voi koskaan joutua erillisiin komponentteihin, jos yksittäinen solmu poistetaan.

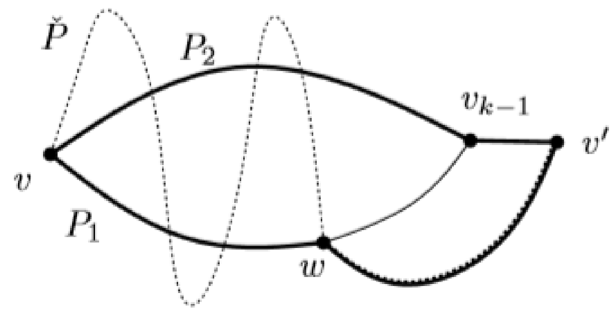
2. Todistetaan seuraavaksi välttämätön ehto, jonka mukaan solmut v, v' kuuluvat samaan sykliin. Tehdään tämä induktiolla solmujen v ja v' etäisyyden $d_G(v, v')$ suhteen.

   Olkoon ensiksi $d_G(v, v') = 1$. Tällöin $\{v, v'\} = e \in E(G)$. Jos nyt verkosta poistetaan solmu v tai v', poistetaan verkosta myös kaari $e = \{v, v'\}$. Verkon kaksiyhtenäisyyden määritelmän nojalla minkä tahansa verkon solmun poistaminen säilyttää verkon yhtenäisenä, joten myös verkon $G - e$ on oltava yhtenäinen. Jos verkko $G - e$ ei olisi yhtenäinen, täytyisi myös ainakin toisen verkoista $G - v, G - v'$ olla epäyhtenäinen, jolloin verkon kaksiyhtenäisyys ei toteudu. Näin ollen verkon yhtenäisyyden nojalla verkossa $G - e$ on olemassa polku solmusta v solmuun v'. Tämä polku yhdessä kaaren e kanssa muodostaa vaaditun syklin, joka sisältää molemmat solmut v ja v'.

   Oletetaan seuraavaksi, että mielivaltainen pari solmuja, joiden etäisyys d_G on pienempää kuin k, kuuluu samaan sykliin jollakin $k \geq 2$. Tarkastellaan kahta solmua $v, v' \in V$, joiden etäisyys on $d_G(v, v') = k$. Olkoon $P = (v = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k = v')$ lyhin polku solmujen v ja v' välillä. Koska $d_G(v, v_{k-1}) = k - 1$, solmut v ja v_{k-1} kuuluvat molemmat olemassaolevaan sykliin. Tämä sykli koostuu kahdesta polusta P_1 ja P_2 solmujen v ja v_{k-1} välillä.

   Tarkastellan seuraavaksi verkkoa $G - v_{k-1}$. Tämä verkko on yhtenäinen, ja siten siinä on polku $\check{P}$ solmusta v solmuun v'. Nyt tämä polku ei sisällä solmua v_{k-1}, koska se poistettiin verkosta. Tarkastellaan polun $\check{P}$ viimeistä solmua, joka kuuluu joko polkuu P_1 tai P_2. Merkitään tätä solmua kirjaimella w.

   Jos solmu w kuuluu polkuun P_1, niin haluttu sykli, joka sisältää solmut v ja v', muodostuu polusta $P_2 = (v, \ldots, v_{k-1})$, kaaresta $e_k = \{v_{k-1}, v_k\}$, polun $\check{P}$ osasta solmujen v' ja w välillä, sekä polun P_1 osasta solmujen w ja v välillä. Vastaavalla tavalla käsitellään tapaus jossa solmu w kuuluu polkuun P_2. Tilannetta on havainnollistettu seuraavalla kuvalla.



Kuva 19: Syklin muodostuminen polkujen avulla. [1]

□

Lause 4.13. *Verkko G on kaksiyhtenäinen, jos ja vain jos sen mikä tahansa alijako on kaksiyhtenäinen.*

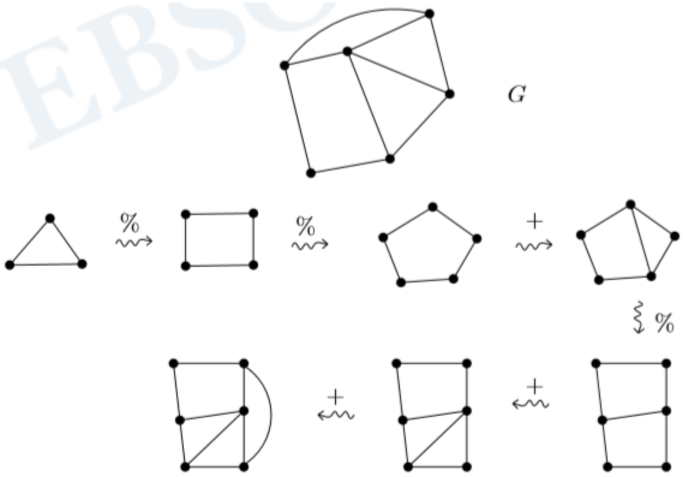
Todistus.

1. Riittää osoittaa, että mille tahansa kaarelle $e \in E(G)$ verkko G on kaksiyhtenäinen, jos ja vain jos $G\%e$ on kaksiyhtenäinen. Jos $v \in V(G)$ on verkon G solmu, verkko $G - v$ on yhtenäinen jos ja vain jos $(G\%e) - v$ on yhtenäinen. Näin ollen, jos $G\%e$ on kaksiyhtenäinen, niin myös G on kaksiyhtenäinen.

2. Oletetaan että verkko G on kaksiyhtenäinen. Nyt riittää osoittaa, että kaksiyhtenäisen verkon G alijako $(G\%e) - z$ on yhtenäinen, kun z on viimeisin verkkoon lisätyistä solmuista. Tämä on seurausta lauseen 4.11 todistuksesta, jonka mukaan $G - e$ on yhtenäinen, kun G on kaksiyhtenäinen.

□

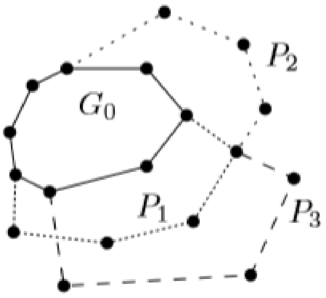
Lause 4.14 (Kaksiyhtenäisten verkkojen synteesi)**.** *Verkko G on kaksiyhtenäinen, jos ja vain jos se voidaan muodostaa kolmiosta K_3 suorittamalla peräkkäisiä kaarien alijakoja ja kaarien lisäyksiä.*



Kuva 20: Uusien verkkojen muodostaminen kolmiosta kaarien alijakojen ja kaarien lisäysten avulla. [1]

Todistus. Kaikki verkot, jotka voidaan muodostaa kolmiosta K_3 kaarien alijakoja ja kaarien lisäyksiä suorittamalla, ovat selvästi kaksiyhtenäisiä lauseen 4.13 nojalla. Riittää osoittaa, että kolmion K_3 avulla voidaan kuvata kaikki kaksiyhtenäiset verkot.

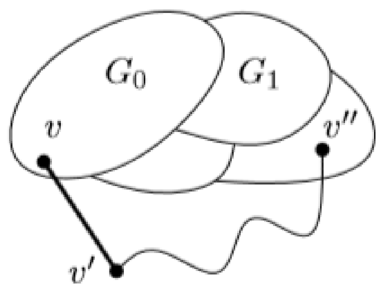
Lähdetään liikkeelle syklistä G_0, joka on saatu kolmiosta K_3 suorittamalla satunnainen määrä kaaren alijakoja (kts. kuva 20). Jos verkko G_{i-1} on jo muodostettu, niin verkko G_i saadaan lisäämällä verkkoon G_{i-1} polku P_i, joka yhdistää kaksi verkon G_{i-1} solmua niin, että polulla P_i ja verkolla G_{i-1} on vain kaksi yhteistä solmua, jotka ovat polun P_i päätesolmuja, ja kaikki muut polun P_i solmut ja kaaret ovat uusia. Näin ollen olemassa olevaan verkkoon G lisätään "korva". Polkujen P_i lisäämistä havainnollistaa seuraava kuva:



Kuva 21: "Korvien"lisääminen verkkoon. [1]

Koska edellä kuvattua polkujen lisäämistä voidaan simuloida kaarien lisäyksillä ja alijaoilla, riittää osoittaa, että kaikki kaksiyhtenäiset verkot G voidaan muodostaa edellä kuvattua poluista muodostuvien "korvien"lisäämistä toistamalla. On kuitenkin hyvä huomata, että kaarien lisäykset ja alijaot on suoritettava oikeassa järjestyksessä, mikä voidaaan huomata tarkasteltaessa seuraavaa tilannetta: Jos solmut $v, v' \in V(G_{i-1})$, on jo yhdistetty kaarella, ja halutaan lisätä uusi polku niiden välille, täytyy ensiksi suorittaa kaaren $\{v, v'\}$ alijako, sillä muutoin solmujen v, v' välillä olisi kaksi kaarta, jolloin verkko olisi moninkertainen. Jotta verkko säilyisi yksinkertaisena, suoritetaan ensiksi kaaren alijako, jonka jälkeen solmujen v ja v' välille on mahdollista lisätä uusi kaari. Tämän jälkeen polun kasvattamista kaaren alijaoilla voidaan jatkaa tarvittaessa. Valitaan nyt mielivaltainen sykli G_0 verkosta G. Oletetaan, että kaikki verkot $G_j = (V_j, E_j)$, kun $j \leq i$, on jo määritelty edellä kuvatulla tavalla. (Huom! Jos $G_i = G$, kaikki mahdolliset verkot olisi jo määritelty.) Oletetaan, että $E_i \neq E(G) \setminus E_i$, kun $e \cap V_i \neq \emptyset$.

Jos kaaren e molemmat solmut kuuluvat joukkoon V_i, niin $G_{i+1} = G_i + e$. Muussa tapauksessa olkoon $e = \{v, v'\}$, missä $v \in V, v' \notin V_i$. Tilannetta havainnollistaa seuraava kuva:



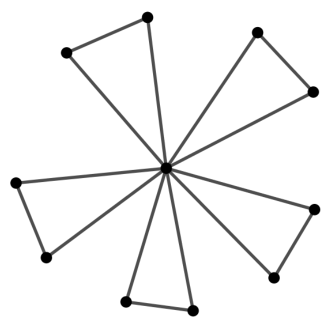
Kuva 22: Solmut v ja v' kuuluvat eri joukkoihin. Polku P yhdistää solmut v' ja v''. [1]

Tarkastellaan verkkoa $G - v$. Koska verkko G on kaksiyhtenäinen, verkko $G - v$ on yhtenäinen, ja näin ollen on olemassa polku P, joka yhdistää solmun v' johonkin solmuun $v'' \in V_i$. Nyt solmu v'' on polun P ainoa solmu, joka kuuluu joukkoon V_i. Näin ollen saamme verkon G_{i+1} lisäämällä kaaren $e = \{v, v'\}$ ja polun $P = (v', \ldots, v'')$ verkkoon G_i. Siis $V_{i+1} = V_i \cup V(P)$ ja $E_{i+1} = E_i \cup \{e\} \cup E(P)$. $\square$

Esimerkki 4.15. Olkoon verkko G kriittisesti kaksiyhtenäinen verkko. Tämä tarkoittaa, että verkko G on kaksiyhtenäinen, mutta verkko $G - e$ ei ole kaksiyhtenäinen, kun kaari e on mikä tahansa verkon G kaarijoukon kaarista $E(G)$. Osoitetaan, että verkossa G on ainakin yksi solmu, jonka aste on 2. [1, Teht. 2a, s. 148]

Lauseen 4.11 nojalla kaksiyhtenäisessä verkossa mitkä tahansa verkossa olevat kaksi solmua kuuluvat verkossa G olevaan sykliin. Jokaisen sykliin kuuluvan solmun aste on aina vähintään 2. Osoitetaan seuraavaksi, että ainakin yhden solmun aste on täsmälleen 2.

Olkoon verkossa eräs kaari $e \in E(G)$, jonka päätesolmut ovat u ja v. Kun verkosta poistetaan kaari e, verkko ei ole enää kaksiyhtenäinen. Tällöin lauseen 4.11 nojalla kaaren e päätesolmuista ainakin toinen on sellainen, että se ei kuulu enää verkossa olevaan sykliin. Tehdään nyt vastaoletus, että kaaren e päätesolmujen aste ennen kaaren poistamista on > 2. Tällöin kaaren poistamisen jälkeen niiden aste on ≥ 2. Tämä tarkoittaa, että kaaren e poistamisen jälkeen molemmista solmuista on edelleen polku ainakin kahteen muuhun verkon solmuun. Verkon kaksiyhtenäisyyden nojalla kaikki muut verkon solmut, lukuunottamatta kaaren e päätesolmuja u ja v, kuuluvat edelleen verkossa G olevaan sykliin. Koska nyt solmujen u ja v viereiset solmut kuuluvat molemmat verkossa olevaan sykliin, myös solmujen u ja v täytyy kuulua johonkin verkossa olevaan sykliin. Tämä on kuitenkin ristiriita oletuksen kanssa, sillä verkko $G-e$ ei ole kaksiyhtenäinen. Tämän nojalla ainakin toisen kaaren e pääteolmun asteen täytyy olla täsmälleen 2, sillä silloin solmu ei kuulu verkossa G olevaan sykliin, mistä seuraa, että verkko $G-e$ ei ole kaksiyhtenäinen. Seuraavassa kuvassa on piirretty eräs esimerkkitapaus kriittisesti kaksiyhtenäisestä verkosta. Kuvasta voidaan havaita, että minkä tahansa verkon kaaren poistaminen saa aikaan sen, että verkko ei ole enää kaksiyhtenäinen.



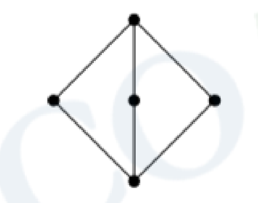
Kuva 23: Kriittisesti kaksiyhtenäinen verkko G.

4.3 Kolmiottomat verkot - maksimaalisuusongelma

Oletetaan, että verkossa G on n solmua. Tiedetään, että tällöin verkossa olevien kaarien lukumäärä on jokin kokonaisluku väliltä $0, 1, \ldots, \binom{n}{2}$. Näin ollen suurin mahdollinen kaarien lukumäärä n-solmuisessa verkossa G on $\binom{n}{2}$, ja kaikki tällaiset verkot ovat isomorfisia täydellisen verkon K_n kanssa (määritelmä 1.5). Tässä luvussa tarkastellaan n-solmuisen verkon kaarien suurinta mahdollista lukumäärää, kun verkko G ei sisällä kolmioita. Tällaista verkkoa kutsutaan kolmiottomaksi verkoksi. Merkitään kolmiottoman n-solmuisen verkon kaarien suurinta mahdollista lukumäärää $T(n)$.

Selvästi voimme todeta seuraavat yksinkertaiset tapaukset: $T(1) = 0$; $T(2) = 1$; ja $T(3) = 2$. Tapaus $T(4) = 4$ voidaan osoittaa seuraavasti: koska sykli C_4 ei sisällä kolmiota, on $T(4) \geq 4$. Lisäksi on oltava $T(4) < 5$, koska verkossa, jossa on 4 solmua ja 5 kaarta, on välttämättä myös kolmio. Näin ollen täytyy olla voimassa tulos $T(4) = 4$.

Kun tarkastellaan verkkoa jossa solmuja on enemmän kuin 4, kaarien maksimaalisen lukumäärän toteaminen ei ole enää helppoa, koska kaaret ja solmut voivat sijaita tavalla, joka on helposti harhaanjohtava. Esimerkiksi tapauksessa $T(5)$ saadaan 5-pituisen syklin C_5 avulla vastaukseksi $T(5) \geq 5$. Jos tällaiseen sykliin lisätään kaari, saadaan välttämättä kolmio, joten vastaus $T(5) = 5$ vaikuttaa järkevältä. Tilanne on kuitenkin harhaanjohtava, sillä solmut ja kaaret voivat myös sijaita seuraavassa kuvassa osoitetulla tavalla, jolloin suurimmaksi kaarien lukumääräksi ilman kolmion muodostumista saadaankin 6:



Kuva 24: Viisisolmuiseen verkkoon on mahdollista piirtää kuusi kaarta ilman että verkkoon muodostuu kolmiota. [1]

Seuraava lause antaa maksimaalisen kaarien lukumäärän $T(n)$ kaikille n-solmuisille kolmiottomille verkoille. Tässä merkintä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa luvun x kokonaisosaa.

Lause 4.16. *Kolmiottoman n-solmuisen verkon kaarien suurin mahdollinen lukumäärä* $T(n) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$*, kun n on mikä tahansa luonnollinen luku.*

Todistus. Tarkastellaan aluksi epäyhtälöä $T(n) \geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Tämän osoittamiseksi riittää löytää sopiva kolmioton verkko. Olkoon X ja Y erillisiä joukkoja ja $K_{X,Y}$ verkko, jonka solmujoukko on $X \cup Y$ ja kaarijoukko

$$\{\{x, y\} : x \in X, y \in Y\}.$$

Verkko $K_{X,Y}$ on tällöin täydellinen kaksiosainen verkko määritelmän 1.5 mukaisesti. Asetetaan $a = |X|$ ja $b = |Y|$. Nyt verkko $K_{X,Y}$ on isomorfinen verkon $K_{a,b}$ kanssa. Täydellinen kaksiosainen verkko ei sisällä kolmioita, ja verkossa $K_{a,b}$ on ab kpl kaaria.

Nyt riittää löytää sellaiset arvot a ja b, että $a + b = n$ ja $a \cdot b = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. Ehto toteutuu kun valitaan $a = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ja $b = n - a$. Tarkastellaan tapaukset n on parillinen ja n on pariton erikseen.

1. Jos n on pariton, eli $n = 2k + 1$, saadaan

$$a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor = k;$$
$$b = k + 1;$$
$$ab = k(k+1) = k^2 + k.$$

   Toisaalta

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2k+1)^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor k^2 + k + \frac{1}{4} \right\rfloor = k^2 + k = ab.$$

2. Jos n on parillinen, eli $n = 2k$, saadaan

$$a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = \lfloor k \rfloor = k;$$
$$b = n - a = 2k - k = k;$$
$$ab = k^2.$$

   Toisaalta

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2k)^2}{4} \right\rfloor = \lfloor k^2 \rfloor = k^2 = ab.$$

Näin ollen $T(n) \geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Osoitetaan seuraavaksi epäyhtälö $T(n) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Koska $T(n)$ on kokonaisluku, riittää osoittaa, että $T(n) \leq \frac{n^2}{4}$. Tiedetään, että epäyhtälö pätee, kun $n \leq 4$. Todistetaan epäyhtälö induktiolla luvun n suhteen siten, että käytetään induktioaskeleena seuraava tulosta:

$$T(n) \leq \frac{n^2}{4} \quad \Rightarrow \quad T(n+2) \leq \frac{(n+2)^2}{4}.$$

Olkoon nyt $G = (V, E)$ mielivaltainen kolmioton verkko, jossa on $n + 2$ kappaletta solmuja. Osoitetaan että $|E| \leq \frac{(n+2)^2}{4}$.

Valitaan ensiksi mielivaltainen kaari $e_0 = \{x, y\} \in E$. Olkoon lisäksi $V' = V \setminus \{x, y\}$ ja $G' = (V', E')$ joukon V' indusoima verkon G aliverkko. Verkko G' on kolmioton, joten induktio-oletuksen nojalla tällöin $|E'| \leq \frac{n^2}{4}$.

Olkoon joukko E_x sellainen verkon G kaarien joukko, jossa kaaret ovat yhteydessä solmuun x. Siis

$$E_x = \{e \in E : x \in e \in E, e \neq e_0\}.$$

Määritellään vastaavasti solmua y vastaava joukko E_y. Nyt joukoissa E_x ja E_y olevat kaaret eivät kuulu määritelmän 1.10 nojalla joukon V' indusoimaan verkon G aliverkkoon, koska solmut x ja y eivät kuulu joukkoon V'. Näin ollen saadaan verkon G kaarijoukoksi

$$E = E' \cup (E_x \cup E_y) \cup \{e_0\},$$

ja edelleen kaarien lukumääräksi

$$|E| = |E'| + |E_x \cup E_y| + 1.$$

Nyt kaarijoukot E_x ja E_y ovat erillisiä, koska kaari e_0 ei kuulu niihin, joten millään kaarijoukon E_x kaarella ei ole yhteisiä solmuja minkään joukon E_y kaaren kanssa. Näin ollen $E_x \cup E_y \leq n$, jolloin lopulliselle kaarien lukumäärälle saadaan epäyhtälö

$$|E| \leq \frac{n^2}{4} + n + 1 = \frac{(n+2)^2}{4}.$$

□

Edellä esitetty lause antoi suurimman mahdollisen kaarien lukumäärän n-solmuiselle kolmiottomalle verkolle. Tarkastellaan seuraavaksi maksimaalisia kolmiottomia verkkoja $G = (V, E)$, joissa kaarien lukumäärä on täsmälleen $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ kaarta. Lauseen 4.16 todistuksen perusteella tiedämme, että täydellinen kaksiosainen verkko $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ on maksimaalinen. Seuraavan lauseen perusteella sopivasti valittu täydellinen kaksiosainen verkko on ainoa maksimaalinen kolmioton n-solmuinen verkko.

Lause 4.17. *Jokainen n-solmuinen maksimaalinen kolmioton verkko on isomorfinen verkon $K_{a,b}$ kanssa, kun $a = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $b = n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

Todistus. Todistus on pitkälti samankaltainen kuin lauseen 4.16 todistus. Edellisestä lauseesta poiketen osoitetaan nyt lisäksi maksimaalisen verkon yksikäsitteisyys. Kuten lauseen 4.16 todistuksessa, voidaan helposti todeta väitteen pätevän tapauksissa $n = 1, 2, 3$, määrittelemällä kaikki maksimaaliset verkot näissä tapauksissa.

Todistetaan nyt lause induktiolla solmujen lukumäärän n suhteen. Käytetään induktioaskeleena oletusta, jonka mukaan n-solmuinen maksimaalinen verkko on yksikäsitteinen, ja osoitetaan yksiskäsitteisyys myös $(n+2)$-solmuiselle verkolle.

Olkoon nyt $G = (V, E)$ kolmioton $(n+2)$-solmuinen verkko, jossa on $\left\lfloor \frac{(n+2)^2}{4} \right\rfloor$ kaarta. Valitaan verkosta mielivaltainen kaari $e_0 = \{x, y\}$, ja määritellään verkko

$$G' = (V', E'), \quad \text{kun} \quad V' = V \setminus \{x, y\} \quad \text{ja} \quad E' = E \cap \binom{V'}{2}.$$

Lauseen 4.16 todistuksen perusteella tiedetään, että $|E| = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + n + 1$, sekä

$$|E'| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \quad \text{ja} \quad |E_x \cup E_y| \leq n.$$

Näin ollen voidaan päätellä, että $|E'| = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, jolloin verkko G' on lauseen 4.16 nojalla maksimaalinen ja siten isomorfinen verkon $K_{X',Y'}$ kanssa, kun $|X'| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ja $|Y'| = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Tämän seurauksena saadaan $G' = K_{X',Y'}$.

Nyt solmut x ja y eivät voi olla yhteydessä molempiin joukkoihin X' ja Y', koska tällöin verkko G ei olisi kolmioton, sillä kaaresta $e_0 = \{x, y\}$ ja solmun x tai y joukkoihin X' ja Y' yhdistävistä kaarista muodostuisi kolmio. Kuitenkin $|E_x| + |E_y| = n$, joten välttämättä joko solmu x on yhteydessä kaikkiin joukon X' solmuihin ja y on yhteydessä kaikkiin joukon Y' solmuihin, tai vastaavasti solmu x on yhteydessä kaikkiin joukon Y' solmuihin ja solmu y on yhteydessä kaikkiin joukon X' solmuihin. Jos solmu x on yhteydessä kaikkiin joukon X' solmuihin ja solmu y kaikkiin joukon Y' solmuihin, saadaan joukot $X = X' \cup \{y\}$ ja $Y = Y' \cup \{x\}$. Vastaavasti jos solmu x on yhteydessä kaikkiin joukon Y' solmuihin ja solmu y on yhteydessä kaikkiin joukon X' solmuihin, saadaan joukot $X = X' \cup \{x\}$ ja $Y = Y' \cup \{y\}$. $\square$

Tarkastellaan lopuksi vielä toista tapaa todistaa lause 4.16. Tämän osoittamiseksi päädytään tarkastelemaan seuraavaa lausetta, joka antaa hiukan eri tuloksen, mutta on itse asiassa seurausta lauseesta 4.16.

Lause 4.18. *Olkoon verkko $G = (V, E)$ kolmioton. Tällöin solmujoukko V voidaan jakaa kahdeksi osajoukoksi X ja Y siten, että kaikille solmujoukon V solmuille x on voimassa tulos* $\deg_G(x) \leq \deg_{K_{X,Y}}(x)$.

Todistus. Osoitetaan ensiksi, että tulos on seurausta lauseesta 4.16. Nyt lauseen 4.18 oletuksen perusteella verkon G kaarien lkm on enintään verkon $K_{X,Y}$ kaarien lkm, joka huomautuksen 1.22 perusteella on

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \deg_G(x).$$

Näin ollen riittää osoittaa, että suurin mahdollinen verkon $K_{a,b}$ kaarien lukumäärä on $ab = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, kun $a + b = n$. Tämä saadaan valitsemalla $a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ja $b = n - a$ kuten lauseen 4.16 todistuksessa. Olkoon nyt $G(V, E)$ kolmioton verkko. Poimitaan verkosta G solmu $x_0 \in V$, jonka aste on suurin mahdollinen. Asetetaan joukot

$$Y = \{y : \{x_0, y\} \in E\} \quad \text{ja} \quad X = V \setminus Y.$$

Selvästi nyt solmu $x_0 \in X$, ja kaikille solmuille $x \in X$ on voimassa

$$\deg_{K_{X,Y}}(x) = |Y| = \deg_G(x_0) \geq \deg_G(x),$$

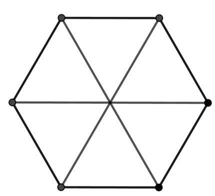
jolloin väite pätee kaikilla $x \in X$. Nyt voidaan huomata, että mitkään joukon Y solmuista eivät voi olla keskenään yhteydessä, koska kaikki joukon Y solmut ovat vierekkäisiä solmun x_0 kanssa, eikä verkossa G ole kolmioita. Tästä voidaan päätellä, että kaikkien joukon Y solmujen y vierekkäiset solmut kuuluvat joukkoon X, joten $\deg_G(y) \leq |X| \leq \deg_{K_{X,Y}}(y)$.

□

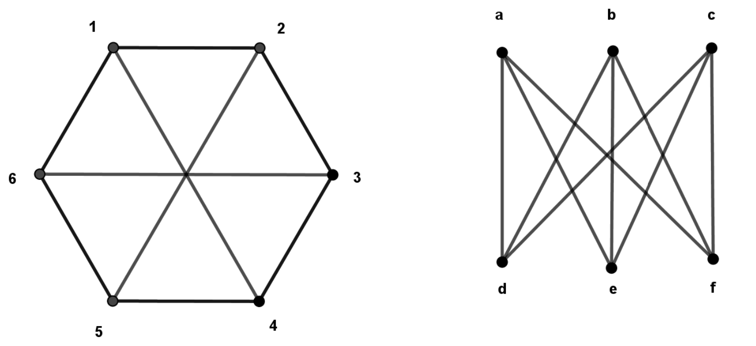
Esimerkki 4.19. Tarkastellaan sellaista kolmiotonta verkkoa, jossa on 6 kappaletta solmuja. Lauseen 4.16 nojalla tällaisen verkon kaarien suurin mahdollinen lukumäärä on

$$T(6) = \left\lfloor \frac{6^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{36}{4} \right\rfloor = 9.$$

Seuraavassa kuvassa on esitetty esimerkki 6-solmuisesta kolmiottomasta verkosta, jossa on maksimaalinen määrä kaaria.



Lauseen 4.17 nojalla 6-solmuinen maksimaalinen kolmioton verkko on isomorfinen verkon $K_{a,b}$ kanssa, missä $a = \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor = 3$ ja $b = 6 - \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor = 3$.



Nyt yllä olevasta kuvasta voidaan havaita, että verkot ovat isomorfisia, kun solmut kuvataan seuraavasti:

$$1 \to a; \quad 3 \to b; \quad 5 \to c; \quad 2 \to d; \quad 4 \to e; \quad 6 \to f.$$

Lisäksi verkossa $K_{3,3}$ kaikkien solmujen aste on lauseen 4.18 mukaisesti yhtä suuri kuin alkuperäisen verkon kaikkien solmujen asteet.

Lähdeluettelo

[1] J. Matoušek, J. Nešetřil: *Invitation to Discrete mathematics, 2nd ed.* OUP oxford, Oxford, 2008. (Ch. 4.)

[2] U. Knauer: *Algebraic Graph Theory; Morphisms, Monoids and Matrices.* De Gruyter, Berlin, 2011. (Ch. 1.1.)

[3] V. Romanov: *Verkkojen teoriaa Königsbergistä internetiin.* Solmu 3/2016.

[4] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson: *Graph Theory, 1736-1936.* Clarendon Press, Oxford, 1976 (Ch. 1A.)